GEODÆTISK INSTITUTS SKRIFTER 3. RÆKKE BIND XXI
MÉMOIRES DE L'INSTITUT GÉODÉSIQUE DE DANEMARK
TROISIÈME SÉRIE · TOME VINGT-ET-UNIÈME

C. C. G. ANDRÆ

CONSEILLER INTIME DES CONFÉRENCES
DOCTEUR ÈS SCIENCES HONORIS CAUSA
DIRECTEUR DES TRAVAUX GÉODÉSIQUES DU DANEMARK
LIEUTENANT—COLONEL
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DES LETTRES DE DANEMARK
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES LINCEI
DÉCORÉ DE LA GRAND-CROIX DE L'ORDRE DU DANNEBROG

Publié à l'occasion du centenaire de sa nomination de directeur des Travaux géodésiques

par

EINAR ANDERSEN

KØBENHAVN
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S
1955

GEODÆTISK INSTITUTS SKRIFTER 3. RÆKKE BIND XXI
MÉMOIRES DE L'INSTITUT GÉODÉSIQUE DE DANEMARK
TROISIÈME SÉRIE · TOME VINGT ET UNIÈME

C. C. G. ANDRÆ

CONSEILLER INTIME DES CONFÉRENCES
DOCTEUR ÈS SCIENCES HONORIS CAUSA
DIRECTEUR DES TRAVAUX GÉODÉSIQUES DU DANEMARK
LIEUTENANT—COLONEL
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DES LETTRES DE DANEMARK
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES LINCEI
DÉCORÉ DE LA GRAND-CROIX DE L'ORDRE DU DANNEBROG

Publié à l'occasion du centenaire de sa nomination de directeur des Travaux géodésiques

par

EINAR ANDERSEN

KØBENHAVN
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S
1955

Portrait au fusain d'ANDRÆ, à l'Institut de Géodésie, par le célèbre peintre danois OTTO BACHE (1839–1927).

Avant-Propos

Comme cela a été le cas dans la plupart des autres pays civilisés, la science géodésique, ainsi que l'activité topographique qui s'y rattache, ont exercé, au Danemark aussi, une certaine attraction sur quelques-uns des hommes les plus éminents du pays, qui ont réussi à combiner la science exacte avec le talent pour la mécanique et le sens administratif. Si nous faisons défiler devant nos yeux ces personnalités, il nous faut citer d'abord Thomas Bugge et les directeurs des travaux de la Mesure des Degrés Danoise: Schumacher, Andræ, Zachariae, Madsen, Buchwaldt et M. Nörlund, sans oublier la multitude de ceux qui, à des places plus ou moins importantes, ont été leurs collaborateurs fidèles et habiles, dont ils n'auraient pu se passer. A deux exceptions près, ils ont tous été membres de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, dont Thomas Bugge fut le secrétaire et M. N. E. Nörlund le président. Cela signifie non seulement qu'il a été possible de trouver des esprits scientifiques pour les postes dirigeants, mais aussi qu'on a voulu fonder le travail géodésique, qui est, en grande partie, un travail pratique, sur une base scientifique solide.

Le caractère scientifique des travaux se manifeste également par la publication d'une collection d'études (Travaux géodésiques) d'une haute valeur, qui se groupent en une première série, dirigée par Andræ, une seconde série, dirigée en majeure partie par le général Madsen, et une troisième série qui, divisée en trois sections: les Publications, les Travaux et les Communications de l'Institut Géodésique, est dirigée par le directeur actuel de l'Institut, M. N. E. Nörlund.

Comme, à côté de la qualité des cartes topographiques, c'est surtout par la publication des résultats que se manifestent les travaux scientifiques d'un institut géodésique, il est naturel de regarder de plus près l'initiateur de ces collections, C. C. G. Andræ, en commémoration de qui le présent ouvrage est publié.

Comme la plupart des autres savants nommés, Andræ déploya son énergie dans divers domaines, et cette activité multiple a donné naissance à des études nombreuses et variées. Sa vie nous est connue surtout par des récits biographiques dus essentiellement à son fils Poul Andræ, dont les ouvrages, ainsi que quelques autres études qui traitent à la fois sa vie et son activité politique, nous ont été d'une grande ressource.

Ce livre traite l'œuvre géodésique d'Andræ et ne s'adresse donc, au Danemark, qu'à un nombre assez limité de lecteurs. Aussi avons-nous tenu à l'écrire en français afin de permettre aux géodésiens des autres pays de le lire, mais dès lors il a fallu consacrer aussi quelques chapitres à la vie et à l'activité politique d'Andræ, les biographes antérieurs, écrivant en danois, ne s'adressant qu'à un public scandinave.

Poul Andræ se rendait compte lui-même de ce qu'il manquait une étude spéciale du géodésien Andræ pour compléter la biographie de son célèbre père. Aussi fit-il par testament un legs au dernier directeur de la Mesure des Degrés Danoise pour permettre la publication de cette étude, et M. Nörlund m'a confié la tâche de l'écrire, tâche dont je me suis chargé avec d'autant plus de plaisir que, depuis longtemps déjà, je me suis senti attiré par les œuvres d'Andræ, comme par sa vie et par sa personnalité.

Je remercie ma fille aînée, Mlle Ulla Andersen, qui a contribué à la rédaction en français, de même que M. André Nicolet, qui a bien voulu revoir le manuscrit.

Copenhague, le 22 janvier 1955. — Einar Andersen

Table des Matières

Chapitre Premier

L'enfance et la jeunesse (1812–35).

Carl Christopher Georg Andræ naquit le 14 octobre 1812 au presbytère de Hjertebjerg dans l'île de Möen. Son père, Johann Georg Andræ, né le $^{2}/_{12}$ 1775 et décédé le $^{8}/_{3}$ 1814, était capitaine au $3^{\text{ième}}$ régiment d'infanterie en Jutland, et sa mère, Nicoline Christine Holm, née le $^{23}/_{10}$ 1789 et décédée le $^{22}/_{9}$ 1862, était la fille du pasteur de Hjertebjerg Christopher Holm. Baptisé le $^{13}/_{1}$ 1813, il eut pour parrain, entre autres, l'intendant d'Aalebæksgaard, père de Vilhelm Birkedal, son ami de jeunesse.

L'origine du nom de famille n'est pas tout à fait certaine. Il se peut que la famille soit originaire de France et immigrée par l'Allemagne, mais il est également possible qu'elle soit originaire d'Allemagne ou même, peut-être, seulement du Slesvig.

L'orthographe du nom, non plus, n'est pas sûre, comme le montrent diverses notes et des actes officiels, où l'on trouve les formes Andræ, Andrä, Andrèe, Andrée et André. C. C. G. Andræ fut le premier à adopter définitivement la forme Andræ, nom qu'il prononçait en mettant l'accent sur la dernière syllabe et sans voyelle nasale.

Ayant perdu son père à deux ans, il va sans dire qu'il n'était pas directement influencé par lui, mais on constate tout de même qu'il tenait sans aucun doute par plusieurs côtés de son père. C'est ainsi qu'il y avait entre eux une grande ressemblance physique, la mère assurant toutefois que le père était plus beau. Or, si l'on ne juge pas ordinairement un homme à sa beauté, il faut tout de même avouer que les traits d'Andræ étaient d'une finesse et d'une noblesse extrêmes, il avait le front haut et le nez romain. L'expression de sa figure était sobre et attentive, et autour de sa bouche jouait un petit sourire sarcastique. De plus le père et le fils portaient le même intérêt à la science militaire. Cependant il paraît que le père ne se souciait guère des mathématiques, mais avait un réel don pour la musique, deux talents essentiellement différents, qu'on trouve pourtant souvent réunis, apparentés qu'ils sont par leur effort commun pour trouver une expression de l'harmonie dans la nature, dans le monde musical et dans celui de la pensée. Un autre trait commun était leur écriture minutieuse aux lettres verticales, mais trop petites, de même que leur goût de l'ordre, qui les poussait à vouloir tout enregistrer et tout schématiser, par exemple par des graphiques et des cartes.

L'influence de sa mère fut évidemment beaucoup plus forte, et on trouve certainement chez le fils des traits qui viennent de sa famille et d'elle-même. Dans cet ordre d'idées il convient de signaler que la mère descendait d'une famille qui avait connu trois générations de pasteurs, commençant par le missionnaire du Grœnland, l'évêque Hans Egede. L'évêque et le conseiller avaient des qualités de caractère décidément communes, surtout un déploiement d'énergie très prononcé — que stimulait particulièrement l'opposition, par exemple de la part des autorités — et le pouvoir de réaliser malgré tout ce qu'ils pensaient être juste.

Andræ appréciait sans doute cette ascendance, mais d'autre part il n'aimait pas parler de ses ancêtres, surtout il mentionnait très rarement la famille de son père. « Vraiment, il n'y a eu parmi eux personne d'importance, pour autant que je sache ... Je suis mon propre ancêtre ».

Cependant lorsque, promu grand-croix de l'ordre du Dannebrog, Andræ dut, d'après les statuts, faire son blason, il s'inspira d'armoiries que son père avait gravées sur une cuiller dont il se servait tous les jours, comme plus tard son fils. Un trait horizontal divise l'écusson en deux régions, dont la supérieure est meublée de deux lis, et dont l'autre, qui, chez le père, portait un laurier, fut orné d'une croix de Saint-André. Sa devise lui était caractéristique, témoignant de son indépendance et de la droiture et de l'intrépidité de son caractère: « Fais ce que dois, advienne que pourra ».

Comme déjà dit, le père d'Andræ mourut dans un âge très jeune; en effet, stationné à Rendsborg, où les conditions sanitaires étaient extrêmement misérables, il y contracta une maladie grave, qui ne devait pas tarder à l'enlever. La mère d'Andræ demeura dans l'indivision après la mort de son mari. Elle avait une petite fortune de quelques milliers d'écus et touchait une pension de veuve, une allocation de la caisse générale de retraites aux veuves et d'autres aliments de faible importance, dont une somme pour l'éducation de son fils jusqu'à l'âge de 18 ans. Bien que ces revenus nous paraissent infimes aujourd'hui, ils étaient alors, quoique modestes, suffisants, surtout que la mère était très économe. C'est ce que montrent tant les dons qu'elle pouvait envoyer de temps en temps à son fils pendant son service de lieutenant, qu'un petit legs qu'elle fit, et dont les fils d'Andræ devaient profiter plus tard.

Devenue veuve, la mère d'Andræ resta d'abord chez son père au presbytère même, puis alla bientôt s'installer dans la maison voisine, où le pasteur lui avait fait faire une résidence de douairière, qui fut appelée Holmsminde.

Lorsqu'il eut atteint l'âge scolaire, Andræ ne fut pas envoyé à l'école. Sa mère et son grand-père maternel, de même que plus tard le pasteur PETER NICOLAI MÖLLER-HOLST se chargèrent de son instruction. Le pasteur Möller-Holst, qui avait été le précepteur du futur roi FREDERIK VII, avait succédé au grand-père d'Andræ comme pasteur d'Elmelunde. Alors, comme plus tard, Andræ estimait beaucoup son précepteur, et il était toujours content de recevoir sa visite ou de lui rendre visite. Vilhelm Birkedal fait l'éloge de la vie familiale du pasteur Möller-Holst, en disant que « chez lui et chez sa jeune et belle femme il rencontrait une intelligence qu'on trouvait rarement ou pas du tout dans l'île ».

Vilhelm Birkedal fut le premier ami d'Andræ. L'amitié fut très intime, mais plus tard leurs chemins se séparèrent et surtout leurs intérêts, et dans les livres de Birkedal on sent une certaine répugnance à compter Andræ parmi ses amis de jeunesse.

La première œuvre littéraire d'Andræ date de l'âge de 10 ans; c'était une petite pièce: « Guillaume Tell, Comédie en deux actes par Carl Andræ, 1822 ». Cette pièce, dont l'action et le dialogue sont très serrés, ne révélait aucun talent pour la poésie et ne fut jamais suivie d'autres œuvres dramatiques.

C'était pendant ces mêmes années que naquit le goût d'Andræ pour les promenades, et il connaissait mieux que personne les chemins et les sentiers de Möen, tous les sites remarquables et des détails intéressants.

De ces années également datait son goût de la lecture. Il se passionnait surtout pour les récits de voyages, vrais ou fictifs, par exemple « Robinson Crusoë », « Le voyage de la famille Gurmann », « Le voyage aux Alpes de Bruun-Neergaard en compagnie du citoyen Dolomieu », « Le tour du monde de Cook », et la « Collection de récits de voyages terrestres et maritimes ».

On a gardé aussi de cette époque un petit journal qui nous montre Andræ écolier appliqué et consciencieux. Toutefois il n'aima jamais beaucoup à tenir son journal, et en effet on n'en trouve qu'un seul, celui de ses séjours à Paris en 1835–36 et en 1837–38. Même plus tard dans sa vie, quand un journal aurait pu avoir une certaine importance pour lui dans son activité politique, comme support de sa mémoire, il n'avait — malheureusement — pas recours à cette méthode, mais se contentait de petites notes très sommaires, se réduisant presque à des mots typiques.

En 1822 la mère d'Andræ vint s'établir à Copenhague avec son fils pour qu'il pût fréquenter une école. Le jeune homme échangea quelques lettres avec son ami Birkedal, et il serrait les lettres de celui-ci, ainsi que son propre « Guillaume Tell », dans une petite boîte de carton avec une fermeture à secret: une époque était terminée et cataloguée.

Bien qu'il parlât en général une langue littéraire tout à fait correcte, Andræ gardait toutefois dans quelques mots un souvenir de son enfance passée à Möen. Il s'en rendait bien compte lui-même, mais ne pouvait se défaire de ces habitudes. D'ailleurs il s'exprimait clairement et distinctement, et il détestait que d'autres ne suivent pas cet exemple. Dans l'intimité il aimait employer des formules curieuses, mais souvent très justes. Mathématicien, il avait en horreur les menées des politiciens, et on pouvait l'entendre dire: « C'est bête — bête comme un pot », ou d'autres boutades pareilles. Il était caractéristique que, toute sa vie, il s'irritât ou même se dégoutât de l'incapacité des hommes, surtout des hommes politiques. Il avait jusqu'à un certain point une confiance bien justifiée en son propre jugement et en l'acuité de sa pensée, confiance qu'on trouve souvent chez de grands talents mathématiques et souvent également, mais moins bien justifiée, chez d'autres. Il est vrai que l'entraînement du raisonnement logique n'est pas réservé aux seuls mathématiciens. D'autres aussi prétendent le posséder, oubliant que le raisonnement logique n'est que la capacité de s'exprimer en phrases non-contradictoires et non pas une garantie de la justesse de la conclusion, si la justesse des prémisses n'a pas été assurée par avance, et cette sûreté ne peut pas être obtenue directement à l'aide de la logique. L'observation impartiale et sobre du mathématicien, habitué à regarder clairement, a certes plus de valeur que les observations rarement impartiales de ceux qui souvent manquent de clarté. A l'issue des conseils du cabinet, il disait souvent: « Que cela m'ennuie. Il me faut sortir de ce pétrin: collaborer avec ces hommes n'est pas possible ».

Avec sa mère, Andræ s'installa sur une des plus belles places de Copenhague, le Graabrödretorv, appelé alors Ulfeldt's Plads. S'il changeait souvent de domicile, c'est que la mère était instable, Andræ, lui, détestait de démenager. Il allait même jusqu'à dire: « Un changement, peut-il être pour le mieux? ».

Il reçut sa première formation scolaire pendant trois ans chez Scharling, maître d'études, jusqu'à son admission à l'École Militaire. On ne sait rien de certain sur ces années, mais ce n'était sûrement pas du bon gré de sa mère qu'il choisit la carrière militaire. Elle aurait bien voulu qu'il se fît pasteur pour suivre la tradition de sa famille. C'est que, son père étant mort depuis longtemps, elle n'avait gardé aucun contact avec sa famille. Cependant elle finit par se laisser convaincre, et une demande d'admission fut rédigée le $^{20}/_{6}$ 1823. Ce document était scellé d'un petit cachet qui portait la légende: « I never change till I die », devise qui devait se montrer très frappante. Andræ dut cependant attendre quelque temps avant d'être admis, soit parce qu'il était un peu trop jeune, soit parce qu'il manquait de protecteurs. Mais, à la mort d'un garçon inscrit, il fut admis et commença ses études à l'école en janvier 1825.

Ce fut pendant les trois années précédentes que s'était formé son intérêt pour les mathématiques. Il lut un livre intitulé « Arithmetisk Magie eller Konstregninger, indeholdende en Samling af underfulde Regneopgaver og herhenhørende Gaader » (« Magie arithmétique ou calculs artificiels, contenant un recueil de problèmes arithmétiques curieux et de devinettes y relatives »). Il s'amusait à construire à son tour des problèmes, de même qu'il prenait plus tard beaucoup de plaisir à poser des problèmes arithmétiques à ses fils, surtout des problèmes qui paraissaient à première vue très difficiles, mais qui, examinés de plus près, se montraient susceptibles d'être résolus d'une manière très simple. De bonne heure il manifesta le goût du mathématicien pour ce qui est simple, et plus tard il nous dit comment il lui arrivait de reprendre un problème qu'il avait déjà résolu parce qu'un procédé différent lui paraissait plus simple, donc meilleur.

En plus de ces problèmes arithmétiques, les puzzles ingénieux et autres casse-tête lui causaient beaucoup de plaisir, soit pour la recherche de la solution, soit et surtout pour la réflexion aux diverses possibilités de les résoudre. Il conserva toujours cet intérêt et se passionna presque plus tard pour occuper ses loisirs par ces exercices.

Ce fut un très grand changement pour Andræ d'entrer à l'École Militaire à l'âge de douze ans, même si, pendant la première période de cadet « gris », il n'habitait pas l'école. En général les élèves se recrutaient dans des familles cultivées, mais leurs rapports entre eux n'en étaient pas moins rudes, les grands tyrannisant les petits. En plus, la méthode d'éducation était dure et l'enseignement à peine suffisant. Au bout de quelque temps Andræ se trouva tout de même bien dans cette école. La tyrannie que les grands élèves exerçaient sur les petits, se manifestait également par le fait qu'ils forçaient les jeunes à boire de l'eau-de-vie et à fumer du tabac. Ce régime donna au jeune cadet une aversion, qu'il garda toute sa vie, pour l'alcool et les vins chauds, tandis que son dégoût pour le tabac ne fut que de courte durée. Car lorsqu'il se remit plus tard à fumer sur l'instigation du professeur Dyssel, il y prit beaucoup de plaisir, et on peut dire qu'il fut un fumeur modéré, mais passionné.

Le $^{20}/_{12}$ 1825 Andræ fut promu cadet, et il put remplacer l'uniforme mélangé à fond gris par la tunique rouge, et il fut bientôt admis comme interne. Andræ ne trouvait pas mauvaise la nourriture, bien qu'elle fût très frugale, et il y suppléait parfois par des friandises entrées en cachette.

Il va sans dire qu'Andræ montrait beaucoup d'intérêt pour les disciplines mathématiques, se consacrant avec un zèle particulier à la cartographie, et ses travaux témoignaient toujours d'une application et d'une précision remarquables.

Andræ ne mit qu'une année à faire les deux premières classes, « yngste og ældste Skolesahl ». D'une manière générale il faisait des progrès faciles et il était à tous égards l'élève le plus avancé. Il passa très vite son examen d'officier et, à 16 ans, fut nommé cadet-caporal, le $^{21}/_{12}$ 1828. Il se classa premier à tous ses examens et remporta tous les prix: des boîtes de mathématiques et des livres, entre autres la « Campagne du Général Buonaparte en Italie » avec l'inscription « Prix d'assiduité et de sagesse ». De plus il reçut le sabre d'honneur du corps. Cette année-là, exceptionnellement, on distribuait trois sabres d'honneur, et ce fut Andræ qui fut le premier, bien que le propre fils de Frederik VI: Frederik comte Dannemand fût reçu formellement ex aequo. Cet ordre de classement ne fut adopté qu'à la demande expresse du prince, son honnêteté lui interdisant d'être seul à être honoré et exigeant que son condisciple le fût également. Andræ apprécia beaucoup cette conduite et se sentit attiré par le prince, de même que pendant le séjour qu'il fit à Paris en 1835–36.

Andræ se trouvait donc bien à l'école, la nourriture modeste et la vie simple lui convenant parfaitement. Les exercices physiques assez durs lui profitaient également, car à part une maladie infantile, qui lui apporta un petit changement sous la forme d'un séjour à l'hôpital, il n'était pas malade et ne le fut jamais. Il n'avait donc pas besoin de médecins, et s'il lui arrivait de se sentir un peu indisposé il consultait la nature. Il aimait à rappeler à ce propos les lettres échangées entre Gauss et Schumacher: « les astronomes ont agi comme des fous en détruisant la foi des profanes en l'astrologie ... vraiment, les médecins ont su mieux faire, qui ont gardé l'astrologie dans leur science ».

Avec les camarades qui avaient obtenu les meilleur résultats à l'examen, Andræ passa maintenant dans la classe des pages, qui préparait l'entrée à l'état-major ou au génie. Les pages portaient un costume particulier, une tunique rouge à revers jaunes, des culottes et des chaussures blanches. Ils servaient aux fêtes royales, c'est-à-dire qu'ils prenaient les plats des mains des laquais et les offraient à la famille royale. A ces occasions Andræ s'arrangeait pour servir le roi, soit pour éviter les avantages qu'on retirait en servant les autres convives sous forme de dessert, fruits ou autres choses laissés sur les plats et que les pages cherchaient souvent à augmenter, soit par dévouement pour le roi et pour son « règne long et clément, inspiré d'un amour pour la liberté et l'égalité », dévouement qu'il devait souvent manifester plus tard.

A l'examen qui termina l'année de page Andræ fut de nouveau le premier; le programme avait été bien chargé, comme le prouvent le nombre des notes — 107 — et l'abondance et la diversité des matières: histoire de la guerre, stratégie, et autres matières purement militaires, de même que des matières mathématiques et des sciences et les lettres: philosophie, histoire et langues, dont le latin. Le certificat d'examen est daté du $^{31}/_{12}$ 1829 et toutes les mentions sont « très bien », ce qui était le mieux possible, le barème des notes ne comportant que « très bien », « assez bien », et « mauvais », qui équivalait à un échec. La capacité pratique d'Andræ était qualifiée d'un « très habile » deux fois souligné.

Bien qu'Andræ fût le premier ou parmi les premiers dans toutes les matières, c'étaient pourtant les mathématiques qui lui paraissaient l'étude de base qu'on ne pouvait commencer trop tôt. « L'enseignement mathématique peut et doit y être considéré (à l'École Militaire) en premier lieu comme l'élément essentiel de toute la formation spirituelle de l'élève, tant morale qu'intellectuelle, et il doit non seulement aiguiser son entendement, mais aussi avoir pour but de lui faire de la reconnaissance rigoureuse de la vérité une nécessité morale, d'affranchir son esprit trop enclin à faire l'écho comme un perroquet, et de donner à l'élève une acuité de la pensée et un bon sens qui choisit toujours le chemin le plus court et qui lui sera utile aussi lorsqu'il aura oublié depuis longtemps tout son savoir mathématique de cadet ». . . . « Si le développement de l'esprit dans la direction indiquée est à considérer comme souhaitable pour l'homme en général et pour le soldat en particulier, on ne saurait non plus nier que l'enseignement mathématique soit particulièrement approprié à exercer une telle influence sur la jeunesse, parce qu'il n'admet rien d'accidentel, rien de douteux, ne se basant sur aucune tradition, sur aucun appel aux sentiments, et qu'au contraire le raisonnement suit, pas à pas, la loi de la nécessité dans un ordre strictement logique, tout en se tenant en même temps sur un terrain facilement accessible au bon sens qui, sans encore posséder toute la sagesse du monde ni l'expérience de la vie, ne se développe que peu à peu «.

Il y opposa la culture classique, qu'il ne négligeait nullement, puisqu'il prit pendant un certain temps des leçons particulières de latin, mais il pensait qu'elle était moins utile, étant donné « qu'en attachant uniquement de l'importance aux langues mortes et à leurs formules, on émoussait la pensée indépendante et s'enfermait dans des vérités et des beautés traditionnelles ».

Andræ était à présent sous-lieutenant, et d'après son propre désir, on l'affecta au corps des chaussées, qui était considéré comme le service le plus scientifique de l'armée. En même temps il continuait ses études en se faisant inscrire à l'École Polytechnique Civile, qui venait d'être fondée. Or, il convient de signaler le fait curieux que bien qu'il fût très satisfait de l'enseignement libre de l'École Polytechnique en opposition à l'enseignement beaucoup plus rigoureux et routinier de l'École Militaire, Andræ ne se sentait pas très attiré par ceux qu'il appelait les « professeurs-élèves de l'École Polytechnique », qu'il regardait plutôt un peu de haut en bas. Les études qu'Andræ y faisait ne durèrent que six mois, et il est possible que son opinion sur l'École Polytechnique s'explique par ce fait, et par les difficultés de début de l'enseignement à cette école nouvelle. H. C. Örsted et Forchhammer cherchaient en vain à le retenir, mais comme l'École Militaire Supérieure fut créée en même temps, rien ne pouvait arrêter Andræ, qui fut admis dans la première classe pour y faire quatre ans d'études.

A l'École Militaire Supérieure, Andræ connut de nouveaux professeurs et un nombre de nouvelles matières, qui devaient avoir la plus grande importance pour sa vie et son œuvre. Il y avait d'abord la géométrie descriptive, alors presque inconnue au Danemark, et qui était professée par le lieutenant Kellner, qui fut plus tard le chef de l'École. De plus, l'analyse mathématique et la mécanique rationnelle, professées par le capitaine Bendz. A la mort de celui-ci, survenue en octobre 1843, Andræ lui succéda comme professeur de ces disciplines, « base de tout l'enseignement ». Mais même si les matières mathématiques étaient celles qui intéressaient le plus le jeune étudiant, le contact avec les professeurs de ces disciplines n'eut pas la même importance pour lui que son amitié avec Johan Ludvig Heiberg, qui devint une vraie intimité. Heiberg, qui enseignait la logique et les lettres, ainsi que le danois, exprime dans une lettre qu'il envoya au mois de novembre 1834 à son père, le poète P. A. Heiberg, exilé à Paris, sa vive admiration des aptitudes d'Andræ: « De tous les jeunes gens que je connais ou que j'ai connus, c'est le plus distingué sous tous les rapports. A un âge aussi jeune, on peut dire qu'il est déjà du nombre des savants; mais ce ne sont pas seulement les sciences exactes qu'il a cultivées; il a du génie et du goût, et il a étudié également la littérature, la philosophie et la politique ».

Le programme de l'École Militaire Supérieure était très vaste et très absorbant, et pourtant, profitant de ses soirées, voire parfois des nuits, Andræ eut le temps non seulement d'entretenir son amitié avec Heiberg et avec sa femme, la célèbre actrice Johanne Louise Heiberg, mais aussi de faire partie de diverses sociétés littéraires.

Après un brillant examen de passage, Andræ fut admis à la classe supérieure de l'École Militaire Supérieure comme un des cinq élèves du cours d'état-major. Comme matières spéciales, il y apprit la géodésie, les fonctions de l'état-major, l'administration militaire, l'histoire de la guerre, la tactique spéciale, la stratégie, les sciences politiques, le droit naturel et international.

A l'examen de sortie, qui eut lieu en octobre-novembre 1834, Andræ fut reçu premier, et le $^4/_{12}$ 1834 il fut nommé lieutenant du génie, arme à laquelle le corps des chaussées venait d'être rattaché, et adjoint à l'état-major du grand-maître des logis.

Les études scientifiques d'Andræ furent brusquement interrompues par son affectation, le $^{20}/_{12}$ 1834, à l'École d'Application à Næstved, auprès du régiment des lanciers de Séeland.

C'est aux souvenirs de Vilhelm Birkedal, son ami d'enfance, que nous devons un portrait d'Andræ pendant ses années d'études. Toutefois il ne faut sans doute pas tout accepter sans réserve, car les amis, inséparables pendant leur enfance, s'étaient écartés de plus en plus l'un de l'autre, séparés par l'incompatibilité de leurs idées sur les questions de l'actualité. Ainsi le libéralisme, introduit dans le pays à la suite de la révolution de Juillet, fit une forte impression sur Andræ, qui avait des opinions libérales. Lorsque, à cause de ses commentaires politiques très mordants, le premier officier d'école Tscherning dut donner sa démission de l'école et quitter le pays pour faire un voyage qui était un véritable exil, Andræ était un des organisateurs d'une soirée donnée en son honneur au restaurant de « Skydebanen ». Cette manifestation eut pour résultat qu'il fut invité pour la première fois chez Heiberg pour prendre part là aussi à une soirée organisée pour fêter Tscherning. Mais bien qu'Andræ manifestât toujours le « courage de ses opinions », il est sans doute un peu exagéré que Birkedal l'appelle radical. La vérité est qu'Andræ était partisan d'une vraie égalité au sens de l'égalité de tous devant la loi et de l'égalité des droits à obtenir une situation pour laquelle on est qualifié par ses aptitudes et sa formation, mais il ne voulait pas confier à tous le même pouvoir ni rendre tous également riches, ou plutôt également pauvres. De même la liberté était pour lui une question de liberté individuelle devant un État qui intervient partout. Le système de la représentation proportionnelle, qu'il devait inventer plus tard, était fait précisément pour assurer à la minorité sa liberté et ses droits vis-à-vis d'un abus de pouvoir éventuel de la part de la majorité. Par contre il ne s'intéressait nullement à « l'homme du peuple », qu'il ne comprenait même pas. La foule, « la populace », ne lui plaisait pas, et on lui a souvent reproché son attitude tout à fait impopulaire. De même qu'il ne recherchait pas la popularité, il n'aimait pas que les autres le fassent.

Andræ était très aimé de ses subordonnés, pour sa parfaite droiture et la modération de ses exigences. Ses ordres n'étaient jamais équivoques, mais brefs et clairs. En plus, Andræ s'intéressait à ses hommes, qu'il n'hésitait pas à louer.

Birkedal se plaint de ce qu'Andræ ne se préoccupât pas de la question de la vie éternelle, mais reconnaît d'autre part que « la pensée d'Andræ était claire et pénétrante, mais d'une curieuse réserve quand on abordait les problèmes profonds et même les plus profonds de l'existence »; pourtant, admet-il, « Andræ n'était jamais moqueur ». Cette attitude n'était probablement pas due à un manque d'intérêt de la part d'Andræ pour ces sujets, mais plutôt à une répugnance à les discuter avec un homme qui n'avait pas la même pudeur spirituelle que lui.

Ce qui était tout à fait caractéristique pour lui, c'était son exigence de la vérité, et sur ce point justement il se montrait en possession d'une des qualités essentielles du savant. Mais cette honnêteté absolue, doublée du désir d'exprimer ses opinions, était très souvent mal interprétée, et c'est pourquoi les jugements de ses contemporains nous paraissent souvent injustes. La supériorité incontestable de son esprit a également causé souvent de l'antipathie pour son attitude, qui paraissait condescendante. « Quand je fais une déclaration, ce qui n'arrive pas bien souvent, j'ai l'habitude de le faire après mûre réflexion et de dire ce que j'entends dire, et de le dire d'une manière telle que ceux qui veulent le comprendre, l'entendent, à condition évidemment qu'ils soient capables de le comprendre ». Ce sont des mots durs, surtout en considération de ceux à qui ils s'adressaient, comme le montre la suite: « C'est pourquoi je n'aime pas en général faire d'explications, de commentaires ou d'additions; toutefois je dois faire une exception pour le très honorable président du conseil ».

On ne peut que s'étonner de la grande activité politique d'Andræ, car au fond de son cœur, c'était un savant, comme ses remarques le prouvent constamment. « Un petit État ne peut, à mon avis, faire mieux que d'employer toutes ses forces à encourager les efforts de la science ... Il n'y a rien qui puisse mieux éveiller l'orgueil d'une nation ou maintenir sa vitalité, et il n'y a rien qui puisse mieux faire sentir aux pays étrangers que cet État a le droit d'exister ».

Comme déjà dit, Andræ fréquentait la maison de Heiberg, et il y venait avec beaucoup de plaisir. Ce n'était toutefois pas uniquement pour avoir de longues conversations avec son professeur de l'École

Militaire Supérieure, bien que, sous l'influence de Heiberg, il fût saisi par la philosophie de HEGEL; c'était autant pour se détendre de ses études en compagnie de la mère de Heiberg, Madame GYLLEMBOURG, et aussi, et surtout, de la célèbre femme de Heiberg, qui avait le même âge que lui et qui, menant une vie assez isolée entre son mari et sa belle-mère, désirait tout naturellement parler avec un homme jeune, et surtout un homme avec la noblesse de caractère et l'intelligence rare d'Andræ. Ils partageaient également un vif intérêt pour le théâtre, et Andræ dépensait une partie assez considérable de sa modeste solde pour aller au théâtre, surtout lorsque Madame Heiberg y jouait.

Andræ était un hôte assidu pendant les années qui précédèrent son mariage, et ses visites étaient toujours attendues avec plaisir par les trois membres de la famille. Sans doute Andræ fut très content de la grande influence qu'il subit dans cette maison où régnaient le tact et le bon goût, mais il était d'autre part de bonne heure un homme aux idées très personnelles, et si l'amitié fut si intime, c'est certainement qu'il avait déjà les opinions qu'il rencontrait chez les Heiberg. Les deux hommes étaient des aristocrates intellectuels qui méprisaient absolument le jugement du peuple et qui se sentaient également dégoûtés par les gens sans formation intellectuelle. Madame Heiberg relève la finesse et le tact d'Andræ, « que seuls peuvent obtenir au même degré que lui ceux qui les possèdent de naissance ». Elle appelle Andræ « notre cher Andræ » ou « notre cher ami Andræ », elle trouve sa conversation « électrisante » et ses manières « ravissantes », et depuis le début jusqu'à la fin elle était fière de son amitié. Les relations avec Madame Gyllembourg n'étaient pas moins intimes, et Andræ appréciait beaucoup la richesse de son caractère. A une seule occasion, Andræ fit la connaissance de Madame PÄTGES, la mère de Mme Heiberg, et on aurait pu s'attendre peut-être à ce qu'Andræ ne se sentît pas attiré par cette femme, dont l'instruction était décidément inférieure à la sienne, mais ce ne fut pas le cas, car elle ne parlait que de choses auxquelles elle s'entendait, qualité qu'il appréciait beaucoup, et que sans doute il aurait bien vue chez beaucoup d'autres qu'il devait fréquenter plus tard dans sa vie politique.

De temps en temps Andræ rencontrait évidemment chez les Heiberg d'autres esprits importants, par exemple les poètes POUL MÖLLER, FR. PALUDAN-MÜLLER et HERTZ. Si Hertz était assez taciturne, c'était une qualité qui ne déplaisait pas à Andræ, qui appréciait beaucoup ses œuvres littéraires. Pourtant il estimait davantage Poul Möller, qui avait des qualités morales qu'il trouva également plus tard chez son beau-frère HANS EGEDE SCHACK, qualités que l'historien littéraire VILHELM ANDERSEN définit en ces mots: « La bienveillance de l'esprit, la sympathie saine et forte pour la vie, l'humour, l'ironie, l'amour extraordinaire de la vérité, et une puissance d'observation également extraordinaire ». Le grand poète romantique OEHLENSCHLÄGER aussi fréquentait le salon de Heiberg, et si Andræ aimait beaucoup de ses vers harmonieux et pleins, son enthousiasme n'était cependant pas sans critique: l'insipidité du poète et son incroyable manque de critique de lui-même le choquaient fort.

Andræ ne resta pas longtemps à Næstved. Il eut pourtant le temps de regretter les amis et les soirées théâtrales de Copenhague. Les loisirs que lui laissait l'entraînement militaire, surtout physique, il les consacrait aux mathématiques, entre autres choses à des opérations arithmétiques. L'entraînement physique, en particulier l'équitation, lui profitait bien, et il s'en trouva fortifié et plus sain, fait qu'il exprimait dans une lettre en ces termes: « on se transformait presque en cheval à force d'en fréquenter toujours ». Au mois de mars il envoya, de même que son ami TREPKA, une requête au roi « d'être exemptés de prendre part aux exercices gymnastiques et à l'instruction purement théorique donnée aux conscrits à l'école de cavalerie et qu'ils sont tenus de suivre ». Grâce à la bienveillance du général BÜLOW pour Andræ, le roi donna la dispense sollicitée, et au mois de mai Andræ put retourner à la capitale pour y reprendre sa vie ordinaire.

Chapitre II.

Les séjours à Paris (1835–38).

Dès le mois de septembre 1835, il eut une bourse d'un fonds « ad usus publicos » afin d'aller à Paris « pour y faire des études de mathématiques supérieures ». Le voyage, qui alla via Hambourg, Brême, Aix-la-Chapelle, Liège et Bruxelles, l'arracha à ses habitudes, et bien qu'il n'aimât pas le changement, il se sentit vite à l'aise dans « le merveilleux Paris sans pareil », où son premier séjour dura une année. En route il fit, pour la première fois, l'expérience d'un chemin de fer, et dans une lettre à sa mère il raconte cette aventure, où l'on se déplace même à une « vitesse affreuse presque sans se rendre compte du mouvement ». Évidemment il visita aussi le champ de bataille historique de Waterloo, où il recueillit quelques reliques sous forme de décombres de Huguemont, objets qu'il garda jusqu'à sa mort.

Avant le départ, Andræ fut reçu en audience par le roi, qui, le lendemain, le rappela pour lui demander, en tant qu'officier de l'état-major du roi, de ne pas manifester des idées républicaines. Cette opinion compréhensible, mais injustifiée que le roi avait de la conviction libérale d'Andræ, ne devait toutefois modifier en rien les sentiments parfaitement amicaux du roi pour le jeune homme.

Le but de son séjour à Paris fut précisé par les instructions que le général Bülow adressa à M. le lieutenant d'Andræ, adjoint à l'état-major du grand-maître des logis.

« Sa Majesté le Roi a daigné vous faire la faveur de vous permettre de poursuivre à Paris, pendant une année, vos études de mathématiques supérieures si bien commencées.

Vous avez donné des preuves si excellentes du grand profit que vous avez tiré de votre stage bien employé à l'École Supérieure que vous saurez profiter mieux que personne de la grâce de Sa Majesté. Je suis persuadé que le résultat répondera aux espérances raisonnables.

Il n'est pas vraisemblable que vous trouviez des cours qui vous soient utiles dans la science que vous allez étudier là-bas, les mathématiques supérieures, car *il y a longtemps que vous avez épuisé la matière de la plupart des cours de mathématiques.* Pour autant que je sache cependant, il y a, à Paris, certains cours publics, soit sur certaines parties de la théorie supérieure des fonctions, soit de géométrie analytique. Si vous avez la chance d'en trouver, il va sans dire que vous en profiterez. Mais autrement vos études seront plutôt des études personnelles.

Il va sans dire également que vous consacrerez beaucoup d'attention à la théorie des fonctions; car elle est la base de toute étude supérieure des mathématiques, et en même temps elle est le moyen le mieux approprié pour juger de la meilleure manière d'organiser dès le début l'étude des sujets supérieurs des mathématiques avec les meilleures perspectives de réussite. Voilà pourquoi cette science sera la première pour vous parmi les travaux que vous allez commencer maintenant.

Je me permets de croire que le calcul différentiel ne prendra pas votre temps. Je ne vois pas non plus la nécessité de faire trop d'intégrations sauf dans la mesure où cet exercice pourra renforcer et faciliter votre travail.

La géométrie analytique est si nouvelle, si intéressante, et donne tant de profit, soit du point de vue purement mathématique, soit du point de vue logique, que je la recommande tout particulièrement à votre attention. Il n'y a aucun doute qu'elle ne donne du travail plus tard, et toute étude de cette sorte mérite bien d'être abordée soigneusement par vous. Tout profit dans ce domaine est très important, à mon avis.

En ce qui concerne la mécanique, je vous prie d'y consacrer une grande partie de votre temps. Vous savez quels auxiliaires excellents, ou plutôt quelles ressources de premier ordre les ouvrages des mathématiciens français offrent pour cette étude. Et vous savez également à quel point plusieurs parties en sont négligées par nous. Je vous prie par conséquent de porter beaucoup d'attention et beaucoup de soins à cette étude très importante.

Les travaux qu'on possède aujourd'hui sur la géométrie descriptive ne sont pas très nombreux, et vous aurez le temps de faire le tour de ce sujet essentiel des sciences mathématiques. J'y compte également tous les traités spéciaux sur les points de détail de la géométrie descriptive et l'emploi de celle-ci.

Cependant il va de soi que, en raison de leurs applications nombreuses, les théories de la construction et de la perspective méritent votre très grande attention; ici toutefois, je vous prie de ne pas vous borner à la perspective linéaire seulement. La taille des pierres et les assemblages de bois, les images optiques et les éléments des machines sont certainement des sujets très importants de la géométrie descriptive, mais n'offrent pas pour nous le même intérêt que les autres.

J'ai dit que vous aurez probablement le temps de connaître tout ce qui appartient à la géométrie descriptive, et c'est là ma conviction. Mais comme il est possible que vous fassiez l'expérience que l'année qui vous a été gracieusement accordée, soit un espace de temps un peu trop court pour étudier tout ce que je viens d'énumérer, vous devrez négliger la géométrie descriptive pour compléter vos études des sujets qui tombent plus directement sous l'analyse mathématique, y compris la mécanique rationnelle.

J'attends un rapport de vous tous les deux mois. Je veux que vous y fassiez un relevé des principaux sujets de vos études pendant les deux mois passés, les ouvrages que vous aurez étudiés, les cours que vous aurez suivis, etc.

Dans cet ordre d'idées je vous prie de m'indiquer le titre, la dimension, le prix de chacun des ouvrages en question, grands comme petits, et d'en faire une critique raisonnée.

Je vous prie également de me faire des notices, évidemment plus ou moins détaillées, sur les instituts et collections s'occupant de ces sciences ou de notre profession en général, tels que l'École Polytechnique, l'École d'application du Corps d'état-major, l'École des Ponts et Chaussées, le Musée d'Artillerie, le Dépôt de Guerre, la Collection des Modèles etc. etc.

Persuadé que vous saurez profiter à tout moment de cette année unique, mais d'autant plus précieuse, que le Roi a eu la bonté de vous accorder dans le but mentionné il ne me reste que de vous souhaiter un bon voyage, une bonne santé, et que vous retourniez avec une vraie satisfaction.

Copenhague, le 28 octobre 1835 Bülow. »

Ces vastes espérances sembleraient à la plupart impossibles à satisfaire, mais pour Andræ ce qui était « une fois lu était compris une fois pour toutes, et jamais oublié ». Cependant même pour un Andræ, c'était beaucoup exiger, surtout en considération de ses grands intérêts dans des domaines toutes différents, mais il montra qu'il savait parfaitement comment organiser son emploi du temps.

A Paris, Andræ étudiait soit chez lui ou dans des bibliothèques à l'aide de manuels de mathématiques français, soit en suivant des cours à la Sorbonne, au Collège de France et à l'École Polytechnique.

A la Sorbonne Andræ suivait des cours de Poisson sur la mécanique rationnelle, de Libri sur le calcul des probabilités, et de Francoeur sur l'algèbre supérieure et sur les éléments de la géodésie. Il complétait ces cours, au Collège de France, par ceux de Lacroix sur le calcul différentiel et intégral et de Biot sur le calcul des orbites de comètes. De plus il suivait, à l'École Polytechnique, des cours de Dumas sur la chimie, de Savart sur la géodésie et de Gay-Lussac également sur la chimie.

Andræ trouvait excellents les cours de Poisson, de Savart et de Biot, tant au point de vue de la forme que du contenu, tandis que ceux de Libri ne se distinguaient « ni par la clarté ni par la facilité du développement ». En principe Andræ se bornait à aller aux cours qu'il n'avait pas eu l'occasion de suivre à Copenhague, et il restait le plus possible chez lui à étudier notamment l'ouvrage de LAGRANGE: « Théorie des fonctions analytiques », le « Traité complet de calcul différentiel et intégral » de Lacroix, le « Traité de mécanique » de Poisson et la « Géométrie descriptive » de MONGE.

Comme prescrit dans les instructions, Andræ envoya tous les deux mois un rapport détaillé au général Bülow, qui les accueillit très favorablement. « J'ai lu avec une extrême joie votre rapport, dont il ressort que vous profitez avec sagesse de votre séjour à Paris pour vous perfectionner encore davantage ... Il va sans dire que l'analyse en général, la mécanique rationnelle et la géodésie, doivent être le sujet essentiel de vos études, et que vous devez employer les ressources qui vous sont offertes à Paris surtout pour faire des études chez vous, et sans doute il m'est inutile de vous rappeler ou d'attirer votre attention sur le fait, que vous ne devez pas manquer d'assister à des conférences données par des hommes éminents sur les diverses sciences, afin de saisir en même temps leur manière de professer, car avec des connaissances étendues on peut bien être un mauvais professeur ».

A l'École Polytechnique Andræ assistait aux interrogations des élèves, et il était fortement impressionné de leur « habileté incompréhensible », car « on ne parlait jamais de connaissances insuffisantes, mais uniquement de l'élégance et de la clarté plus ou moins grandes de la réponse ».

Il ressort des rapports d'Andræ que le nombre des cours de l'École Polytechnique était de beaucoup inférieur à celui des leçons correspondantes de l'École Militaire Supérieure de Copenhague. Le général Bülow s'en rendit évidemment compte, et il s'inquiéta du grand travail exigé des élèves danois. Andræ, qui avait une haute admiration pour les connaissances des étudiants français, n'a pourtant pas l'impression qu'on apprenait moins en France qu'au Danemark. Il faut certainement en chercher la cause dans l'organisation différente de l'enseignement. A l'École Militaire Supérieure l'enseignement unissait toujours à une forme rigoureuse l'étude approfondie de chaque détail, et cette méthode est en réalité toujours d'usage. Sans doute l'enseignement donné à l'École Polytechnique était plus libre, bien qu'il le fût moins qu'à l'université. La liberté de l'enseignement demande d'autant plus aux élèves, mais en même temps elle permet de développer davantage leur esprit même aux dépens des élèves moins doués, qui doivent nécessairement abandonner.

Évidemment Andræ envoya aussi un rapport sur l'École d'application du corps d'état-major au général, qui accusait toujours réception des rapports, et qui rappelait en termes très aimables à Andræ l'importance de « fréquenter des conférences; car ce sera peut-être comme professeur que vous aurez l'occasion d'être utile à la patrie, et ce n'est qu'en écoutant de grands maîtres que vous pourrez obtenir la bonne éloquence qui est si importante pour toutes les conférences ».

Andræ portait déjà depuis longtemps des lunettes, mais la lecture intense et son habitude d'écrire en caractères tout menus fatiguaient tellement ses yeux qu'il s'en inquiéta et dut les reposer autant que possible pendant quelque temps. Cependant il ne se produisit rien qui eût une influence permanente sur la vue d'Andræ, et jusqu'à ses dernières années il put aligner ses petites lettres, élégantes, et presque verticales sur le papier.

Il n'évita pas les gênes économiques, mais une avance de solde et une gratification de 200 écus le sortirent d'embarras. C'est qu'il avait eu de grosses dépenses pour l'achat de livres; mais sur un autre point également, il ne se privait pas. Comme à Copenhague, ses soirées de théâtre lui devenaient à Paris une distraction essentielle et très appréciée, mais qui lui coûtait cher. De plus il allait souvent voir le père de Heiberg, qui était devenu presque aveugle, et il lui faisait des lectures des « Extrêmes » de Mme Gyllembourg, et le vieux poète aimait bien ces nouvelles écrites par « la mère de son fils ». Johan Ludvig Heiberg et Mme Heiberg faisaient justement, cette année-là, un voyage en France et rendirent pour la première fois visite à l'exilé. Andræ faisait généralement partie des réunions des Heiberg, de même qu'il accompagnait souvent les jeunes au théâtre. Malgré son admiration pour beaucoup des grands acteurs, ceux-ci ne l'emportaient jamais dans son cœur sur Mme Heiberg. Seule la grande cantatrice Mlle GRISI le ravissait absolument, et plus tard il persuada Mme Heiberg d'imiter sa coiffure, telle que nous la connaissons par le célèbre portrait de E. D. BÆRENTSEN. Plus tard, deux reproductions lithographiques des plus grandes actrices qu'il aimait, Mme Heiberg et Mlle Grisi, étaient l'unique ornement des murs de son salon.

A Paris, Andræ fréquentait également le juriste Bornemann et le théologien Martensen, le futur évêque de Séeland. Martensen rendait visite aux Heiberg et était un ami estimé de la maison. Andræ, déjà tout à fait familier avec Paris, était une sorte de guide pour ses amis, mais il exigeait d'eux qu'ils se soumettent entièrement à sa direction. C'était une règle générale que toutes les fois qu'Andræ faisait quelque chose, par exemple quand il établissait un plan de travail, il voulait qu'il fût accepté tel quel, sans discussions ni compromis.

Martensen aimait sincèrement Andræ, « dont je devais admirer la rare clarté d'esprit et les connaissances étendues et avec qui j'eus plusieurs discussions sur des sujets importants ». Cette remarque montre certainement que, s'il n'a pas voulu discuter les problèmes les plus profonds avec un homme comme Birkedal, Andræ le faisait bien avec un Martensen.

Au mois d'octobre 1836 Andræ rentra à Copenhague; pendant le voyage de retour il visita Heidelberg et Francfort et fit une excursion le long du Rhin. Il voyageait avec Vilhelm Bjerring et le compositeur Hartmann, dont il avait fait la connaissance à Paris, et avec qui il était souvent allé au théâtre. Évidemment Andræ avait eu beaucoup de chagrin de devoir quitter Paris, mais juste avant le départ le général Bülow lui donna la promesse qu'il pourrait y retourner l'année prochaine pour quelques mois, s'il en faisait la demande.

Andræ, de nouveau, rendit des visites fréquentes aux Heiberg, et il faisait partie des bals dits de lecture, qui tenaient lieu à Madame Heiberg des vrais bals auxquels son mari lui interdisait de prendre part. A ces soirées, on récitait des œuvres de Goethe, de Schiller et d'autres auteurs encore. On ne sait pas si Andræ prenait part lui-même à ces récitations, mais son organe sonore et distinct s'y prêtait sans doute parfaitement, et il prenait souvent plaisir à réciter des vers ou simplement à faire entendre sa voix, car il avait un vrai talent de conteur, de même qu'il savait imiter de manière convaincante la voix d'autrui.

S'il ne sollicitait pas une prolongation de son séjour à Paris, c'est qu'Andræ préférait y aller plus tard pour avoir le temps de s'assimiler au préalable les matériaux déjà recueillis. Cependant il craignait de ne pas avoir les loisirs nécessaires, le roi ayant décidé que, « pour employer de la manière la plus utile et la plus fructueuse les officiers d'état-major en temps de paix, l'état-major du grand-maître des logis préparerait un atlas topographique du royaume, basé sur ses propres mesurages ». Aussi l'idée d'être chargé éventuellement de faire ces mesurages assombrissait les pensées d'Andræ. Il trouvait ce genre de travail « une demi-mort, affreuse et ennuyeuse ... on ne peut mieux faire pour rendre fou un homme normal que de l'envoyer faire des mesurages les dix heures de la journée pendant trois mois ».

Toutefois les affaires n'allaient pas si mal que cela. Andræ fut affecté aux bureaux de l'état-major au palais d'Amalienborg sous les ordres du futur général P. F. Steinmann, qui le chargea de classer divers papiers et qui — afin que le travail ne fût pas trop vite terminé — cherchait tous les jours à les remettre en désordre.

Dans la « Revue mensuelle de littérature, t. XVII » Andræ publia un compte rendu du précis de Kellner: « La partie théorique de la géométrie descriptive ». L'article était très flatteur et témoigne des grandes connaissances d'Andræ en cette matière.

Au mois d'août Andræ demanda de nouveau au général Bülow la permission d'aller passer six à sept mois à Paris. Il avait déjà reçu du roi 600 écus sur les fonds « ad usus publicos ».

Andræ espérait obtenir une chaire à l'École Militaire Supérieure quand il aurait acquis l'instruction nécessaire. L'ancien directeur des cours de l'École, le colonel J. Abrahamson, qui avait malheureusement été éloigné de l'établissement, avait beaucoup de confiance dans les « capacités éminentes » d'Andræ, mais depuis qu'il n'avait plus d'influence sur l'École Supérieure, il était devenu pessimiste, car « plusieurs personnes n'ont guère envie de respecter les capacités éminentes, et la plupart pensent qu'il n'est pas nécessaire d'avoir beaucoup d'intelligence ».

Au mois de septembre 1837 Andræ partit de nouveau pour son Paris bien aimé. Le voyage passa par Londres, et il était accompagné de son ami Trepka. De nouveau Andræ allait voir le vieux Heiberg, qu'il aidait parfois à écrire des lettres à son fils. Souvent Andræ ajoutait quelques mots en post-scriptum, évitant ainsi d'une manière habile d'écrire une lettre lui-même, car quoique obligé de faire beaucoup de correspondance, il ne l'aimait absolument pas, et ses amis ont souvent critiqué ses lettres, par exemple Læssöe, qu'il connaissait de l'École Militaire et qui écrit qu'à lire les lettres d'Andræ on a l'impression qu'il s'est dit « ah, si je n'avais pas à écrire ». Quelquefois cependant les lettres d'Andræ montraient bien ses pensées et ses états d'âme, et alors elles se remplissaient d'expressions d'une vive admiration: « Je rappelle à votre souvenir que c'est justement au commencement du mois d'avril que Paris perd la couronne de toutes ses merveilles, l'incomparable Opéra Italien, qui aussi pendant l'hiver passé m'a beaucoup enthousiasmé ». A vrai dire on ne s'attend pas à de tels mots de la part d'un mathématicien, mais le charme d'Andræ était justement cet esprit richement facetté, qui en faisait le favori des dames par la conversation spirituelle à laquelle il les engageait.

A Paris Andræ assista aux funérailles de Talleyrand, l'ancien ministre des affaires étrangères de Napoléon I^{er}, qui mourut le $^{17}/_{5}$ 1838. Andræ s'intéressait beaucoup à Napoléon, dont il admirait vivement la personnalité. A la mort de J. L. Heiberg il hérita de lui un cachet de Talleyrand que son père, qui avait été le chef de bureau du ministre, avait gardé comme une relique.

Si Andræ éprouve une admiration si vive pour Napoléon, il ne l'admire pas uniquement comme héros et général, mais autant comme législateur et administrateur. Il louait beaucoup le « bon sens » de Napoléon, ainsi que le fait qu'il était au-dessus des raisonnements et coutumes habituels. Il avait ces mêmes sentiments pour le César des Romains. C'est qu'il n'était rien moins que démocrate, et s'il sympathisait tant avec deux des grands souverains de l'histoire, cette admiration s'explique par son enthousiasme pour la monarchie absolue éclairée, telle qu'elle était réalisée au Danemark sous la règne du bon roi Frederik VI, qu'Andræ aimait beaucoup.

Mais bien qu'il reprît la vie qu'il avait déjà menée à Paris, faisant des visites fréquentes aux théâtres, chez le vieux Heiberg et chez quelques amis, on constate toutefois un changement important dans les habitudes d'Andræ. Il se retire de plus en plus pour s'occuper de ses études chez lui, Place du Carroussel. « Pendant tout cet hiver j'ai vécu assez isolé et ces derniers mois presque sans voir personne, et pourtant je suis sûr de pouvoir compter ces six mois parmi les plus heureux de ma vie. Une fois la décision prise de me défaire pour ainsi dire de toute relation, j'ai trouvé des milliers d'avantages à cette vie, de l'existence de laquelle je ne m'étais jamais douté jusqu'ici. Me voici presque au point où cela me gêne d'aller au théâtre ou même de dîner en compagnie de mes compatriotes, parce qu'il m'est beaucoup plus désagréable d'être interrompu dans mes propres méditations quand je ne le désire pas, que de ne pouvoir développer mes pensées à autrui quand je le désire. Cependant je comprends parfaitement que cet état anormal soit insupportable à la longue ».

L'essentiel pour Andræ était ses études chez lui, mais en même temps il suivait des cours à la Sorbonne et au Collège de France. Toutefois, son sens critique se développait toujours, et plusieurs conférences — même faites par des savants célèbres comme Poisson, Francoeur, et Poncelet — le décevaient soit par la forme, soit par le contenu. Cependant il écoutait avec plaisir les conférences astronomiques de Biot et chimiques de Dumas, bien que les sujets fussent quelque peu en dehors de son propre domaine d'études.

A la demande du général Bülow, les rapports d'Andræ étaient plus courts et même presque schématiques. Il semble qu'il se soit occupé surtout de philosophie et d'histoire des mathématiques en lisant les œuvres de Descartes, Pascal, Newton, Huygens, Leibnitz, Euler, d'Alembert, Landen et Lagrange. Les réponses du général étaient toujours approbatives, mais elles traduisaient pourtant un certain scepticisme quant à l'opportunité de sacrifier beaucoup de temps aux matières philosophiques. C'est qu'Andræ avait écrit dans un de ses rapports: « Avant de terminer il faut ajouter que je me suis vu obligé d'employer une partie assez importante de mon temps à des matières purement philosophiques, parce que je me sens de plus en plus persuadé de l'impossibilité de faire des études vraiment scientifiques qui ne se basent sur une connaissance à peu près exacte de la philosophie du temps, impossibilité qui se manifeste avec d'autant plus de force quand il s'agit de l'étude des mathématiques actuelles, qui, justement par leur détachement de la philosophie, se sont égarées dans un labyrinthe de théories erronées et sans esprit, d'où, bientôt, elles ne sauront plus sortir ».

Cette fois-ci également, Andræ avait des soucis matériels, mais, sur la recommandation du général Bülow, le roi lui accorda une gratification de 100 écus et une avance sur sa solde.

L'hiver très dur (il avait fait jusqu'à 16 degrés Réaumur au-dessous de zéro) contribuait à sa mauvaise économie, par suite de la forte consommation de combustibles. Mais il n'était pas gratuit non plus de boire un Pomard exquis, ou de déguster des huîtres au champagne.

Pendant toute sa vie Andræ garda l'habitude française de boire du vin rouge à son dîner, qui se terminait par une olive et un petit dessert.

Le genre léger de divertissements, qui fait justement la célébrité de Paris à l'étranger, et qui attire surtout la jeunesse, n'avait pas plu à Andræ pendant son premier séjour et le faisait évidemment encore moins cette fois-ci. Il aimait mieux rester à la maison: « nos plus belles aventures sont nos pensées ».

Bien que très critique à l'égard de ceux qu'il fréquentait, Andræ aimait en général les Français, il appréciait « le calme très aimable et en même temps surprenant de leur comportement », même les jours de grande fête comme la fête nationale, le 1^er^ mai, fête de Louis Philippe. « Il n'y a pas de bas peuple, tandis que chez nous, quand il se passe quelque chose, on dirait qu'il n'y a que du bas peuple ».

S'il trouvait très charmants les Français, c'était en compagnie des philosophes qu'il se plaisait le plus. « Car rien n'est comparable à la joie qu'on éprouve quand la vérité se dévoile soudain, remplissant de vie tout ce qu'on a connu avant ».

En considération de la carrière politique qu'Andræ devait faire plus tard, on peut s'étonner qu'il ne suivît pas avec passion les débats des chambres françaises. Son fils, Poul Andræ, dit que son père n'a « pas une seule fois » assisté à une séance parlementaire, mettant fin ainsi à la légende qu'a lancée par exemple C. St. A. Bille dans le « Dictionnaire de biographie danoise «, où il écrit » qu'en France Andræ avait suivi avec un vif intérêt les luttes parlementaires bouleversantes de l'époque ».

Le 6 juillet 1838 Andræ rentra définitivement à Copenhague. De nouveau il fit le voyage avec Trepka, et cette fois-ci ils passèrent par la Suisse et Francfort.

Chapitre III.

La carrière (1838–93).

Après son retour Andræ craignait de nouveau d'être envoyé faire des mesurages, mais, tandis que presque tous les officiers adjoints en recevaient l'ordre, Andræ y échappa. Il n'était pas le seul à ne pas aimer les campagnes de mesurages: son ami Læssöe, qui en supportait déjà les ennuis, lui écrivait: « Impossible d'arriver à avoir une conversation tant soit peu passable, et au fond c'est là ma passion .... pour toute compagnie j'ai un gros rustaud paisible, mais qui a la malheureuse idée que son devoir est de me tenir compagnie et qui m'embête donc pendant presque tout le temps que je suis à la maison — en parlant? Non, Dieu le sait, — il se tait, planté sur une chaise en face de moi, il se tait et il soupire ».

Il ressort d'une lettre qu'il adressa à Læssöe qu'Andræ aurait aimé faire des conférences: « J'aimerais essayer de faire quelques conférences, évidemment destinées surtout aux élèves de l'École Supérieure, et qui traiteraient une assez grande partie de l'histoire des mathématiques, sujet qui m'intéresse depuis quelque temps et qui, pour autant que je sache, reste encore inconnu ». Pourtant Andræ se faisait beaucoup de scrupules, et les circonstances ne lui permirent pas de réaliser son désir. Læssöe, cependant, chercha à vaincre les hésitations d'Andræ, et à cette fin il lui écrivit de ne pas abandonner son projet, même si « tu n'es pas satisfait toi-même de ton travail. N'as-tu pas souvent vu les meilleures œuvres scientifiques paraître sous forme d'essais, d'esquisses, quitte à être plus tard refondues et achevées ». Pendant l'été 1839 Andræ fut enfin envoyé faire ces mesurages envisagés avec tant d'horreur. Il devait faire des travaux de triangulation dans l'île de Lolland, mission qui fut vite terminée et beaucoup moins ennuyeuse qu'il ne l'avait pensé. Peu de temps après eut lieu un événement qui fut doublement triste pour Andræ: la mort soudaine du roi Frederik VI, survenue le $^3/_{12}$ 1839. Comme déjà dit, Andræ portait une affection sincère à ce souverain, et, d'autre part, il devait avoir de tout autres sentiments pour son successeur, Christian VIII, qui était d'un caractère plutôt afféte, disposé à ne faire confiance qu'à ceux qui faisaient acte de servilité, attitude incompatible avec la nature d'Andræ. La même année, Andræ fut promu capitaine de 2$^{\text{ème}}$ classe à la suite de l'état-major. Cette promotion fut un des derniers actes du général Bülow en qualité d'aide-de-camp général de Sa Majesté. Bien qu'adjoint à l'état-major, on envoya Andræ faire des mesurages en Lauenbourg pendant l'été 1840, sans doute pour l'éloigner quelque temps de l'entourage militaire du roi. Cette décision fut l'effet non seulement des mauvaises dispositions du roi pour Andræ, mais aussi du fait qu'Andræ avait préparé avec ses collègues Læssöe, Trepka et Flensborg un projet de réforme du service à l'état-major. Cette initiative était en somme tout à fait correcte, les divers officiers ayant été invités à envoyer des propositions à une commission établie à cet effet. Toutefois la proposition s'opposait aux vues de Steinmann, et critiquait surtout le service de mesurages que celui-ci préconisait comme occupation principale des officiers de l'état-major; en effet, les quatre auteurs avaient écrit que « tout ce service de mesurages doit constituer une partie assez faible, mais pourtant non sans importance, des travaux de l'état-major; si ce service en est l'activité principale pour ne pas dire unique, il n'est plus question d'un état-major, mais d'un corps topographique ». Malgré l'opposition de Steinmann les officiers demandèrent au roi la permission de publier le projet, mais Sa Majesté refusa en exprimant son fort mécontentement. Toutefois le service en Lauenbourg réussit parfaitement à Andræ. Dès le mois d'août, il fut de retour à Copenhague. Très préoccupé de la réforme de l'enseignement des officiers, il publia sous divers pseudonymes dans le « Fædrelandet » plusieurs articles sur l'École Militaire Supérieure. Steinmann n'aima pas ces articles et il en disait qu'il « jugeait incorrect que les officiers publient des articles sur des affaires militaires ». L'esprit d'opposition d'Andræ ne lui facilitait pas la réalisation de son plus grand désir d'être nommé professeur à l'École Militaire Supérieure. A cela venait s'ajouter cette autre difficulté que le roi avait décidé que les chaires de l'École Supérieure ne devaient pas être occupées par des officiers de l'état-major général. L'opposition contre Steinmann que faisaient Andræ et ses amis, ne resta pas tout à fait sans suite, car au mois de décembre 1841 le chef de l'état-major fit nommer une commission, parmi les membres de laquelle on comptait Andræ et Læssöe, pour « donner leur avis sur la manière la plus utile d'organiser le service topographique de l'état-major ». Entretemps, ou plus exactement à la fin de l'année 1841, Andræ s'était fiancé avec sa cousine du côté maternel, Mlle Hansigne Pouline Schack, fille cadette du pasteur de l'église Vor Frelser (Saint Sauveur), le doyen Nicolai Schack, docteur ès lettres. Le mariage eut lieu une année après, le 23 novembre 1842, et peu de temps avant, le $^1/_{11}$ 1842, Andræ fut nommé professeur de topographie et de géodésie à l'École Militaire Supérieure, malgré la décision, dont nous avons parlé, que les officiers de l'état-major ne pouvaient y obtenir de chaire.

Comme le professeur Düssel donna soudain sa démission, Andræ fut nommé professeur de mécanique technique, et au mois de novembre 1843, à la mort du capitaine Bendz, également d'analyse mathématique et de mécanique rationnelle. Ainsi Andræ eut de quoi s'occuper: « Trois cours à l'École Militaire Supérieure, en plus des calculs de l'état-major, des commissions, des ordres, et autres choses pareilles. C'est à en devenir fou ». Il n'avait pas eu le temps d'avoir une vraie lune de miel, et il dut bientôt renoncer à la plupart de ses relations mondaines. Ses visites chez les Heiberg, qui avaient été assez nombreuses, furent désormais bien moins fréquentes. Du moment qu'il avait son propre foyer, Andræ n'aimait absolument pas le quitter, même pour aller voir ses amis les plus chers. Il y en avait aussi une autre raison: bien qu'il fût content de visiter les Heiberg, il préférait les avoir à lui tout seul, et depuis que Martensen avait commencé d'être un invité régulier, il risquait d'avoir à prendre part à de longues discussions sérieuses, qu'il aimait bien, mais pas en présence de Mme Heiberg et de Mme Gyllembourg, avec lesquelles il trouvait que le temps était mieux employé à une conversation plus légère et plus animée. Les soirées de théâtre très fréquentes d'Andræ prirent fin également; surtout depuis que Madame Heiberg se fut retirée du théâtre il ne s'y rendait que très rarement.

Nous avons dit qu'Andræ était surchargé de travail pendant les premières années de son professorat à l'École Militaire Supérieure. « Le travail dur auquel j'ai été astreint pendant une grande partie de l'hiver et du printemps, et surtout le fait épuisant de devoir courir sans cesse d'une chose à une autre, d'une conférence à des études chez moi, de calculs à des conférences et des séances, a entraîné, maintenant que mon activité n'est plus aussi absorbante, un certain affaiblissement intellectuel ainsi qu'une détente et une lourdeur des pensées, qui à des moments me font grand'peur. Toutefois j'espère un mieux quand je serai de nouveau en plein hiver ».

Andræ resta attaché à l'École Militaire Supérieure pendant douze ans, mais autant il aimait faire ses cours sur ses sujets favoris, autant il prenait en haine la direction de l'école, antipathie nourrie par divers incidents qui se produisirent au cours des années. D'abord il y eut la nomination de son ami Læssöe comme professeur de l'école, suivie de son renvoi presque immédiat à la suite d'une plainte déposée par des élèves au sujet d'un autre des professeurs, le capitaine Steenstrup, et qu'on croyait sans aucune raison avoir été provoquée entre autres par Læssöe. Cette méfiance réciproque se manifesta aussi à une autre occasion où Andræ avait exprimé le désir d'assister à l'enseignement des autres disciplines de l'école. Un des vieux professeurs de physique et de chimie, le capitaine Hoffmann, s'en offensa et donna sa démission. Le roi, informé par un rapport incorrect des causes de la démission du capitaine Hoffmann, demanda au général von Bardenfleth, d'écrire au commandant de l'École Militaire Supérieure pour critiquer la « manière peu délicate dont le capitaine Andræ avait averti le capitaine von Hoffmann de son intention d'assister comme pour les censurer aux conférences de celui-ci ». Andræ répondit au commandant: « Parmi plusieurs défauts importants dont souffre l'enseignement donné à l'école, celui qui se fait le plus sentir et qui est le plus généralement connu, c'est le manque d'unité et de rapports mutuels entre les divers sujets. On ne peut remédier à ce défaut que d'une seule manière, une partie au moins des professeurs se chargeant du grand travail de se mettre au courant de l'enseignement dans son ensemble . . Voilà pourquoi j'avais l'intention de me procurer cette connaissance de l'enseignement de l'École Supérieure qu'il était de mon devoir d'avoir et que je devais regretter de ne pas avoir. J'ai fait part de ce point de vue au conseil d'enseignement, sans rencontrer, évidemment, aucune objection, et c'est cette intention et elle seule que j'ai exprimée également dans un entretien — strictement privé d'ailleurs — que j'ai eu avec le capitaine Hoffmann. Si pendant cette conversation le capitaine s'est montré capable de comprendre mon dessein ou si l'état de ses nerfs lui en a donné des idées tout à fait fausses, je trouve aussi peu délicat qu'inutile d'y insister. C'est là une affaire strictement privée et bien que je regrette personnellement qu'elle ait provoqué la démission du capitaine, je dois ajouter quand-même que je me sens persuadé, même dans ce cas, d'avoir pour moi le droit autant que la délicatesse ».

Andræ ajoutait qu'il espérait que le commandant informerait Sa Majesté de ces points de vue, de manière à lui faire voir les choses sous un autre jour. Dès 1842 Andræ avait été promu capitaine de l'état-major et son conseil en matière de géodésie. Le $^{24}/_{5}$ 1848 Andræ fut promu commandant, mais il ne prit pas part activement à la guerre de 1848–50. En 1848 le général Hansen fut nommé ministre de la guerre. Il n'avait pas de bienveillance pour l'École Supérieure, et le $^{6}/_{1}$ 1850 il écrivit à l'École qu'Andræ ne pourrait s'attendre à avancer ultérieurement à moins de cesser son professorat pour entrer dans le service actif.

Andræ protesta énergiquement contre cette tracasserie incontestable de la part du ministre, et il se mit pour ainsi dire à la disposition de tout service, actif ou non, pendant la durée de la guerre: « Mais je ne peux nullement désirer d'abandonner mon poste actuel de professeur, et je me réserve le droit absolu de considérer mon service actif comme purement temporaire, de sorte qu'à la fin de la guerre je rentre immédiatement dans mes fonctions à l'École Supérieure. Dans le cas où M. le ministre a l'intention de me proposer l'alternative d'abandonner définitivement ma chaire ou de renoncer à être employé au service général de l'état-major, je n'ai pas de choix, car je ne peux décidément pas renoncer au professorat. Cependant je n'arrive pas à comprendre qu'on puisse avec équité, en se basant sur ce qui précède, me refuser tout avancement aujourd'hui comme à l'avenir ».

Andræ fonde cette attitude sur de fortes raisons, en se référant par exemple tant à sa propre promotion de commandant qu'aux avancements d'autres professeurs de l'école. Il est particulièrement intéressant de noter qu'Andræ mentionne son activité future en général. « Je me permets donc de faire remarquer que mon espoir est qu'à la nomination future de deux postes particuliers, on reconnaîtra que ma formation et mon activité spéciales me donnent des titres à être considéré comme qualifié. L'un de ces postes est celui de commandant de l'École, d'autant plus que, après la réorganisation future de l'École, il comprendra essentiellement l'ancien poste de directeur de l'enseignement. L'autre est le poste de directeur des travaux géodésiques pour la carte du Danemark, à la condition toutefois qu'il soit reconnu que ces travaux aient une administration particulière, indépendante de l'état-major, reconnaissance dont je ne doute pas ».

Comme Andræ le dit lui-même, il n'est pas très modeste de parler de ses propres qualifications, mais ici il trouve une occasion spécialement favorable de le faire. On ne sait pas comment fut accueillie cette lettre, mais nous avons vu qu'Andræ ne prit pas part au service actif. Par contre les chicaneries de la part du ministre de la guerre continuèrent: en effet, quelque temps après et à l'occasion de l'élection d'Andræ au Rigsdag (le Parlement danois), le général Hansen souleva la question de la possibilité de cumuler ces deux postes. Andræ n'eut pas de peine à répondre que, sa nomination antérieure de membre du parlement (octobre 1848) n'ayant jamais causé de collision de ses deux emplois, il n'y avait aucune raison de supposer qu'il s'en produisît à l'avenir. En 1851 Andræ fut promu lieutenant-colonel. Andræ continua paisiblement son activité à l'École Supérieure jusqu'au printemps 1854, où se produisit un changement définitif. Pendant un débat au Landsting (Sénat) Andræ vota pour une motion qui exprimait l'inquiétude de l'assemblée devant la politique du cabinet A. S. Örsted dans l'affaire de la réforme constitutionnelle. Il va de soi que la conduite Andræ était tout à fait légale et correcte, mais elle fournit au ministre Hansen l'occasion de lui donner le choix de se retirer du Parlement pour ne jamais y rentrer ou d'offrir sa démission de l'armée et d'abandonner son activité à l'École. C'était un choix très difficile pour Andræ, apparemment en tout cas: d'une part son très grand amour pour l'École et pour tout le travail qu'il y faisait, et d'autre part ses idéals de liberté et d'indépendance. L'alternative lui était en réalité moins difficile, ses idéals étant absolus, comme le montre sa future devise d'écusson, bien que, probablement, les conséquences lui en aient coûté. Il répondit immédiatement à la demande du ministre en ces termes: « Bien qu'il ne soit pas invraisemblable que la situation se développe de telle manière que dans peu de temps je serai amené à donner ma démission du Parlement, je ne me vois pourtant pas en état de faire la déclaration précise et obligeante que Votre Excellence m'a demandée hier. Veuillez agréer, Monsieur le Ministre, les assurances de ma très haute considération. Andræ ». Le résultat de ce refus ne se fit pas attendre, car le 15 avril Andræ fut relevé de ses fonctions de lieutenant-colonel de l'état-major et de professeur à l'École Militaire Supérieure. En 1853 Andræ avait été élu membre de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, de même qu'il avait été nommé, cette même année, directeur du Service de la Mesure des Degrés Danois. Le seul poste qu'Andræ gardât fut donc la direction du Service de la Mesure des Degrés, qu'il occupa jusqu'en 1884. Évidemment son congédiement causa un profond chagrin et une vive indignation parmi les élèves de l'École Supérieure, qui lui adressèrent une très belle lettre de remerciement à l'occasion de son départ.

Un autre des députés, le grand homme politique Hall, qui avait pris une part beaucoup plus décisive à l'élaboration de la motion contre le cabinet d'Örsted, dut partager le sort d'Andræ, étant révoqué de son poste de commissaire auditeur général par interim à l'armée de terre. Déjà à ce moment-là Andræ et Hall étaient assez intimes, et ils décidèrent d'entreprendre ensemble un voyage à l'étranger, afin d'éviter la satisfaction que les gouvernants auraient à les voir attristés de leur licenciement. Ils se rendirent en France et en Suisse. Le voyage était décidément un voyage de plaisir. Andræ s'occupait des arrangements pratiques, organisant l'itinéraire, consultant les cartes et les horaires, et administrant leurs finances. Hall, par contre, assistait quand il fallait discuter avec les patrons d'hôtel etc. et il les tirait de plusieurs difficultés par ses façons agréables.

Le voyage commença le $^{29}/_{6}$ par le paquebot jusqu'à Kiel et de là par le train à Hambourg. Ensuite par Hanovre et Cologne à Bruxelles et à Paris. Andræ s'était attendu à trouver un Paris tout autre depuis son dernier séjour là-bas, mais rien n'avait changé. Mais bien que la première impression d'Andræ fût très bonne, il en eut vite assez et ne demandait qu'à s'en aller. « J'ai retrouvé toutes choses comme je les avais quittées ou bien tout à fait disparues, ruinées ou détestables — c'était étrangement le cas du Théâtre Français, où nous avons fini par aller hier. La salle n'avait presque pas changé, mais les spectateurs s'étaient transformés en bas peuple, les acteurs brillants en artistes forains, et les pièces en bouffonneries affreuses. — Aujourd'hui, je ne crie que: « Dieu donne que nous étions en Suisse aussi »», citation, avec la seule substitution de « Suisse » à « Paris », de « Jean de France » III^e acte, scène 1, comédie du célèbre auteur Ludvig Holberg, où le jeune Danois Jean, qu'un séjour à Paris a rendu fou de tout ce qui est français, se sert aussi incorrectement qu'intempestivement du français, « aussi » voulant dire « de nouveau ». Bien qu'il sût parfaitement le français, Andræ avait comme Jean de France une drôle d'aversion pour l'emploi du subjonctif. C'est ce que montre une petite anecdote qui date de son séjour à Paris en 1835, où il fit la connaissance du diplomate français Dotezac, qui s'étonna de ce que, alors qu'il parlait correctement, il n'employât guère le subjonctif, à quoi Andræ répliqua: « Bah, mais vous comprenez bien que je n'en ai pas besoin, parce que tout ce que je dis est parfaitement sûr ».

Quand Andræ regardait son « merveilleux Paris sans pareil « d'autrefois avec des yeux si différents, ce n'est évidemment pas que la ville fût transformée, mais parce qu'Andræ avait beaucoup changé lui-même, de jeune homme ouvert et impressionnable, il était devenu un peu las et indifférent aux plaisirs de la vie de Paris et à l'animation des grands boulevards et des cafés.

Andræ et Hall repartirent pour la Suisse, où il passèrent quelques semaines. Leur voyage les mena via Genève à Chamonix, où ils traversèrent la Mer de Glace pour monter sur le Couvercle. Ils atteignirent même le Jardin situé à 9000 pieds au-dessus de la mer. Andræ était très content de cette excursion et de ce qu'il était assez fort pour faire une telle ascension sans trop de fatigue. Hall, au contraire, était moins amateur d'efforts physiques, et c'est pourquoi ils n'entreprirent plus d'ascensions pendant leur séjour en Suisse.

Ils firent un petit tour en Italie jusqu'au Lac Majeur, où ils restèrent quelques jours. Cependant la chaleur étouffante leur interdisait de s'y attarder, et ils repartirent vers le nord en passant par le Saint Gothard. Après deux mois environ d'absence, les deux voyageurs rentrèrent à Copenhague le 22 août.

Jusqu'ici j'ai fait un exposé assez détaillé de la vie d'Andræ, de sa famille, de ses relations et amis, de l'influence qu'ils ont exercée sur lui, et de sa formation étendue dans son pays et à l'étranger. Au moment d'aborder son œuvre d'homme, il est naturel de se concentrer sur celle-ci en passant plus légèrement sur sa vie privée, d'autant plus que ses diverses activités ont absorbé presque tout son temps, n'en laissant que très peu pour sa vie familiale, pour ses amis ou pour ses relations mondaines.

Pendant que Hall était ministre des cultes et de l'instruction publique et par suite de son immixtion dans tous les détails de l'administration du théâtre, Heiberg, qui en était le directeur, donna sa démission au mois de mars 1856. Sans doute on peut beaucoup reprocher à Hall, mais Heiberg n'était pas sans tort lui non plus, car son administration avait souffert depuis quelques années de manques essentiels. Mme Heiberg, très mécontente de la tournure de l'affaire et devant ces « conditions honteuses » donna à son tour sa démission. Bien qu'il fût d'une façon générale du parti de Heiberg et bien qu'il eût, je l'ai dit, une prédilection toute particulière pour l'art dramatique, Andræ n'intervint pas dans ce conflit. Plus tard on réussit à décider Madame Heiberg à reparaître sur la scène, mais sa rentrée fut brusquement interrompue par la mort de Heiberg, survenue au mois d'août 1860.

Andræ hérita de son ami une canne d'ébène qu'il tenait de son père, l'ancien défenseur de la liberté, et dans la poignée de laquelle était monté un morceau d'une brique de la Bastille.

En plus de ses études esthétiques et philosophiques Heiberg s'était occupé pendant ses dernières années d'un sujet tout neuf, l'astronomie. Mme Heiberg écrit dans ses mémoires: « Une vie revécue dans le souvenir » que Heiberg « s'absorbait avec la passion d'un amant dans la contemplation du ciel étoilé ». Il se peut que Heiberg ait été inspiré à faire ses observations sur les sciences naturelles par sa longue amitié avec Andræ. En tout cas il est hors de doute qu'on peut relever l'influence d'Andræ dans l'intérêt que Heiberg portait aux mathématiques et à la géodésie, et qui l'amena à s'occuper du calcul des probabilités et de la géodésie astronomique, particulièrement de l'observation de la hauteur du pôle et des différences de longitude.

A la mort de Heiberg on voulut publier une édition complète de ses œuvres, et Andræ contribua à cette entreprise surtout pour ce qui concernait les travaux d'optique. Andræ n'a vraisemblablement pas suivi les travaux astronomiques de Heiberg avec beaucoup d'intérêt, et il n'était pas très enthousiaste de ses écrits sur ces matières. Aussi dut-il y apporter beaucoup de corrections et, à une occasion, en refaire même une certaine partie.

Plus tard Andræ prêtait en quelque sorte sa collaboration à Mme Heiberg, qui publiait la correspondance de sa belle-mère, Mme Gyllembourg. Celle-ci était morte le $^1/_7$ 1856. La collaboration se faisait essentiellement par écrit, car Andræ ne sortait que très rarement, et depuis quelques années ses visites chez Mme Heiberg s'étaient réduites à deux ou trois par an. Comme je l'ai dit, il préférait être seul avec elle quand il allait la voir; c'est qu'il la trouvait le plus naturelle, donc le plus charmante quand il la voyait en famille, tandis qu'elle l'était moins quand il y avait du monde.

C'était avant tout l'ami commun d'Andræ et de Mme Heiberg, Krieger, qui embellit la vie de celle-ci pendant ses dernières années. Krieger venait souvent la voir, mais elle préférait de loin les visites, beaucoup plus rares, d'Andræ, qui possédait mieux que personne « le charme de la conversation ».

Une petite note de 1864 nous raconte qu'on offrit à Andræ de succéder comme chef du Théâtre royal à Tillisch, qui allait entrer dans le cabinet Bluhme. Mais malgré sa passion pour le théâtre, Andræ déclina cette offre, qui lui était faite par Tillisch lui-même.

En plus des voyages à l'étranger déjà mentionnés, Andræ fit encore deux voyages, dont l'un en Suisse en 1863 avec ses fils Poul et Victor, qui venaient de passer leurs baccalauréats. Il alla également avec sa famille à Rome pendant l'hiver 1870–71.

Avant de passer à l'œuvre d'Andræ, dont je m'occuperai dans ce qui suit, en parlant un peu de son activité politique et surtout de son activité comme directeur de la Mesure des Degrés, je tiens à dire brièvement que si Andræ était un homme plutôt solitaire, quelques amis mis à part, et s'il était loin d'être populaire, on lui donna tout de même au cours des années de nombreuses preuves de reconnaissance des services qu'il rendit. En 1850 il fut nommé chevalier de l'ordre du Dannebrog, promu commandeur en 1855, et en 1857 il reçut la grand-croix. En 1858 il fut nommé conseiller intime d'État et en 1884 conseiller intime des conférences et eut par là le titre d'Excellence, de même qu'il fut décoré cette année-là également de la croix d'argent de l'ordre du Dannebrog.

Pendant les années 1860–66 Andræ fut président de la classe des mathématiques de l'Académie Royale. Ce fut pendant la période de mai 1860 au mois d'avril 1867 où l'Académie, qui n'avait pas de président principal, était divisée en quatre sections. Après la séance du 2 novembre 1866, au cours de laquelle on décida la fusion des quatre sections en deux, Andræ et Japetus Steenstrup, président de la classe de physique, furent remplacés par H. L. Arrest, qui fut élu président de la classe des sciences. A l'occasion du quatrième centenaire de l'Université de Copenhague en 1879, on lui conféra le grade de docteur ès sciences honoris causa. En hommage des mérites de la science géodésique Andræ reçut en 1869 du roi de Prusse Wilhelm (Guillaume) I^er^ une grande médaille d'or « für Wissenschaft » (pour les sciences).

Sa santé fut en général excellente pendant toute sa vie, mais il s'excusait souvent de sa défaillance quand il désirait décliner des invitations. Toutefois il ne fallait pas prendre cela très au sérieux, sa robustesse était inébranlable, et même à 80 ans passés il aimait à manifester de la galanterie vis-à-vis les dames en leur ramassant les objets qu'elles avaient laissés tomber avant que des hommes beaucoup plus jeunes n'aient bougé. Ce ne fut que pendant le dernier hiver qu'il fut gravement malade, et il mourut le 2 février 1893. Il repose dans la sépulture de la famille au cimetière d'Assistens.

En souvenir d'Andræ a été créé un fonds qui porte son nom. Ce fonds a été institué par Mlle Meta Rist, fille du commandant du 11^e^ Régiment, qui se signala pendant la guerre de 1864–66. Elle avait fréquenté chez les Andræ, qui la considéraient presque comme leur fille, et elle accompagna la famille dans son voyage à Rome. A la mort d'Andræ, elle hérita d'une somme de 10.000 couronnes qu'elle utilisa pour créer le Fonds commémoratif d'Andræ, conseiller intime des conférences, et dont les intérêts seraient alloués tous les cinq ans à un officier de l'armée de terre qui avait donné des promesses d'une œuvre importante dans le domaine des mathématiques. Comme il se montra qu'il était difficile de trouver quelqu'un qui remplît cette condition, le texte des statuts fut modifié, et le legs est attribué aujourd'hui à un officier de l'armée de terre qui manifeste des intérêts particuliers pour les mathématiques et pour la géodésie pour lui permettre de continuer ses études dans l'une ou dans l'autre de ses branches.

Chapitre IV.

L'activité politique (1848–93).

Dans les pages qui vont suivre je vais donner un résumé très bref de l'activité politique d'Andræ, en soulignant surtout ce qui lui était caractéristique dans ce domaine. Pourquoi, après tout, Andræ fut-il un homme politique? C'est que, si on s'intéresse aux progrès de l'humanité en général, et qu'on ne reste donc pas indifférent à sa situation actuelle et de ses efforts, on ne peut négliger la politique, ou plutôt on se voit obligé de s'en occuper, en tout cas de son côté agréable, c.-à-d. celui du confort matériel et du progrès spirituel.

Toutefois Andræ ne fut jamais un homme de parti, il était unique dans la politique danoise: le parti d'Andræ ne comptait que lui. Par conviction il se ralliait à l'idée d'un État entier, c.-à-d. un Danemark indivisé jusqu'à l'Elbe, et par ses sympathies il se sentait attiré par les nationaux-libéraux, surtout C. Hall et Fr. Krieger, mais en réalité il était conservateur, ou plutôt conservateur dissident.

Le $^{12}/_{10}$ 1848 Andræ fut nommé membre de l'assemblée constituante comme le premier membre élu par le roi Frederik VII. Soutenu par les amis des paysans, il entra le $^{4}/_{12}$ 1849 au premier Folketing (chambre des députés), dont il fut le président autoritaire et impartial pendant les trois premières sessions. Du $^{14}/_{5}$ au $^{17}/_{7}$ 1851, il fit partie de l'assemblée dite des notables à Flensbourg, qui jouait le rôle d'assemblée consultative pour le gouvernement pour l'organisation de la monarchie après la guerre de 1848–50. Aux élections de 1852, ne voulant pas s'appuyer sur la gauche, il renonça à être réélu. Or, il s'approcha des nationaux-libéraux, et le $^{3}/_{6}$ 1853 il entra au Landsting (sénat), où il siégea jusqu'au $^{20}/_{6}$ 1853, date où les nationaux-libéraux le firent tomber. Du $^{11}/_{2}$ 1856 au $^{31}/_{12}$ 1863 il fut membre du Parlement issu de la constitution d'octobre et du $^{29}/_{3}$ 1864 au $^{28}/_{7}$ 1866 membre du Landsting du Parlement réformé par la constitution de novembre. De nouveau sénateur indépendant le $^{18}/_{10}$ 1866, il fut dès le $^{5}/_{11}$ nommé par le roi membre du Landsting, siège qu'il occupa jusqu'à sa mort le $^{2}/_{2}$ 1893. Deux fois il fut élu président du Landsting, mais les deux fois il refusa d'accepter l'élection. Andræ fut ministre pendant quatre ans environ, car le $^{12}/_{12}$ 1854 il fut élu ministre des finances, puis président du conseil le $^{18}/_{10}$ 1856. Le $^{13}/_{5}$ 1857 il abandonna ce poste, mais continua ses fonctions de ministre des finances jusqu'à sa démission, le $^{10}/_{7}$ 1858. C'était sans enthousiasme qu'il fut ministre et sa retraite fut définitive, bien qu'il ne lui manquât pas d'invitations à rentrer dans le cabinet. Au Parlement il agissait avec beaucoup de sûreté, parfois même avec trop de sûreté. Son esprit logique ne lui montrait qu'un seul chemin du problème à sa solution, et il tenait à cette solution presque avec entêtement. Il suivait les raisonnements d'autrui avec scepticisme, écoutant froidement, répondant froidement, parfois avec une froideur glaciale. Andræ était persuadé que, ayant toujours raison, il fallait que les autres acceptent ses conclusions, et obéissent comme de simples soldats à l'ordre de l'officier. Il fut homme d'État plutôt qu'homme politique ordinaire. Tout de même son cœur n'était pas froid, on sentait souvent une sensibilité humaine derrière la façade froide. Il avait aussi un tempérament vif, il pouvait s'indigner, mais le plus souvent il était assez réservé. Au début il avait peu d'amis, et il n'en eut pas davantage, mais devint un homme toujours plus solitaire. Pendant les dernières années de sa vie, sa sûreté s'affaiblit quelque peu, et lui, qui avait été « la tête la plus forte et la volonté la plus ferme », fut à un certain point opprimé par le joug écrasant du doute.

Andræ fut un aristocrate d'esprit, un homme qui n'admettait pas les compromis; il portait en lui de grandes possibilités et ne manquait pas de confiance en ses capacités, mais peut-être en sa force, une force que ses rares amis auraient pu lui apporter, une force que sa femme n'était guère en état de lui donner — malgré le grand enthousiasme qu'elle avait pour son activité politique. Mme Heiberg, sans doute, aurait pu lui communiquer cette force, bien qu'elle n'eût pas pour la politique le même intérêt que Mme Andræ, mais l'amour incontestable qu'Andræ avait pour elle, resta inexprimé par la logique de sa conduite à tous égards pleine de tact. Pour le logicien Andræ, Mme Heiberg était la femme parfaite et désirable, mais a priori inaccessible: le problème n'avait pas de solution — un point, c'est tout. La conséquence naturelle fut qu'Andræ choisit d'épouser une autre, qui, elle, n'était pas inaccessible. Il voulait fonder un foyer, il voulait des enfants, et il eut deux fils, Poul et Victor, qu'il aima, il voulait une existence tranquille et régulière, et son choix ne tomba pas sur une indigne. Il eut ce qu'il souhaitait, non pas celle qu'il ne pouvait obtenir, — il ne l'a certainement pas désiré, — mais d'autre part cette femme aurait pu lui donner le stimulant qui lui manquait parfois dans les moments décisifs de sa carrière politique.

Andræ était un partisan déclaré du régime de la chambre unique, étant donné qu'au Danemark (contrairement à ce qui avait lieu en Angleterre) le bicamérisme manquait de justification historique et ne pouvait qu'entraîner des retards et des difficultés, qui auraient pour conséquence naturelle qu'un beau jour il faudrait le remplacer par une chambre unique élue par le peuple.

Comme tout le monde ne peut ni ne veut contribuer également à l'économie de l'État, Andræ trouve inopportun de demander l'égalité du suffrage. Les élections doivent se faire par votes directs, ce mode offrant le plus d'équité et le plus de simplicité. Pour stimuler l'intérêt aux élections et sauvegarder les droits de la minorité, Andræ créa et institua par la loi du $^{2}/_{10}$ 1855 le régime de la représentation proportionnelle comme le premier au monde dans son genre.

Andræ était nettement contre le parlementarisme et désirait que le roi eût la liberté de choisir les ministres, qui devaient tenir fermement le gouvernement entre leurs mains, mais sous la responsabilité envers les chambres élues.

De même que l'économiste français Frédéric Bastiat, Andræ est contre la tutelle étendue de l'État, préconisant l'initiative privée et la concurrence libre. « Les chemins de fer qui rapportent bien sont utiles, mais ils se créent spontanément, sans l'intervention de l'État; les chemins de fer qui ne rapportent rien, sont manqués, et doivent être supprimés sans tarder, on n'aurait jamais dû permettre leur établissement ». Par contre la science et l'université, ainsi que le théâtre, celui-ci pourtant seulement jusqu'à un certain point, sont au-dessus de toute discussion. Les fonctionnaires publics doivent être rétribués avec équité et raisonnablement, tant dans leur propre intérêt que, surtout, dans l'intérêt de l'État.

Andræ était contre l'inquisition fiscale et ne voulait pas faire la déclaration de ses revenus. Il était fermement contre les impôts directs et préférait les contributions indirectes, qui « étaient toujours à préférer; ce sont elles qui peuvent de la manière la plus facile et la plus naturelle être imposées aux contribuables et acquittées par eux, et qui se répartissent sur toute la population redevable de la manière la meilleure et la plus saine ».

Andræ dut supprimer le péage du Sund en 1857 sous la pression de l'étranger, mais à part cela il exigeait des droits d'importation et d'exportation, et était plutôt partisan du libéralisme économique et antisocialiste. Sans vouloir entrer dans un gouvernement ni le diriger, Andræ réussit en 1870, en collaboration avec Krieger, P. Vedel, le comte Frijs et même le roi Christian IX, à garder la neutralité, sinon l'indépendance, du Danemark. La connaissance qu'Andræ avait des défauts de la défense, non seulement pendant la guerre de 1864, « engagée à la folie, menée à la folie «, mais aussi, plus tard, telle qu'elle fut organisée, malgré son opposition, par la loi militaire de 1867, détermina, avec sa conception toujours certaine de tous les éléments d'une situation, son attitude en matière de politique extérieure. Il attachait beaucoup d'importance à la défense, mais ses arguments différaient essentiellement de ceux des autres partisans de la défense au Parlement. C'est ainsi qu'il était contre la fortification terrestre de Copenhague et contre le service militaire obligatoire, mais il désirait une forte défense maritime de la capitale, une armée de campagne petite, mais efficace d'après le système de remplacement, soutenue par une marine de guerre moins dominante.

Andræ était orateur né, se passant d'un manuscrit, qui, au fond, n'a pour effet que de distraire, à moins qu'on ne préfère en faire une simple lecture. Un billet, rappelant les points essentiels, lui suffisait, parce qu'il avait tout préparé à l'avance, méditant dans son fauteuil chez lui. Un de ses biographes dit qu'il aurait préféré de se taire, mais qu'il sentait de son devoir de parler. Cela n'est guère exact, Andræ se sentant obligé de manifester ses opinions par l'action et par la parole. Il suffit de rappeler sa participation à l'organisation de la fête en l'honneur de Tscherning, son option pour la politique au lieu de la carrière militaire, choix qui ne fut pas facile, étant donné surtout son grand amour pour son travail à l'École Supérieure.

Comme déjà dit, ses traits étaient beaux et sa voix sonore, mais, de petite taille et assez mince, il ne faisait pas grande figure à la tribune, et pourtant, à peine eut-il prononcé la première phrase que tout le monde écoutait intensément. Et malheur à qui osait l'interrompre: la riposte tombait immédiatement, comme le coup d'une lame affilée, porté avec la rapidité et la force écrasante de la foudre. Andræ excellait dans les débats; il trouvait immédiatement les faiblesses de ses adversaires, et rien ne frappe plus durement que la logique d'un adversaire compétent qui parle d'un ton glacial, voire caustique.

Andræ connaissait toutes les ressources de la rhétorique, il savait tordre les fils isolés de la pensée en un fil unique d'une force infrangible. Lui, qui dans tous ses traités employait la langue académique avec correction et un peu de rigidité, possédait également à fond le style tout différent de la langue parlée et l'art du discours, et il serait souhaitable que d'autres étudient les discours d'Andræ pour en prendre exemple, de manière à éviter le manque de naturel qui fait tort à trop d'orateurs qui s'efforcent délibérément, donc vainement pour faire croire qu'ils possèdent une culture qui ne se laisse pas inculquer de l'extérieur, mais qui naît et grandit lentement de l'intérieur au prix d'études poursuivies au cours d'une longue vie.

A propos de l'activité politique d'Andræ, il convient de signaler son intérêt pour la cause du Grœnland, et de relever surtout ses discours au Landsting, où, à diverses occasions, pendant les années 1863–80, il fut le premier à proposer une exploration danoise de la vieille terre danoise sur la côte est du Grœnland.

Il était naturel que le descendant de Hans Egede s'intéressât au Grœnland et aux Grœnlandais. Au premier abord ses efforts avaient pour but de retrouver la colonie est disparue, comme il ressort d'une note sur le Grœnland (de mars 1863) adressée à l'amiral Steen Bille, ministre de la Marine. On y voit l'importance qu'il attachait à cette cause: « De cette manière on avait contribué faiblement, mais tout de même par un effort à l'acquittement d'une lourde dette nationale ... Nous ne sommes pas si infimes ni si dépourvus de force qu'il faille considérer comme une chose convenable et naturelle de laisser à d'autres le soin de faire l'exploration géographique de notre propre territoire ».

Au moment où Nordenskjöld fit la traversée du passage Nord-Est (mai 1879), Andræ reprit cette question. Au début, il ne fut voté que 5000 couronnes pour une exploration topographique et archéologique du district de Julianehaab, mais les interventions réitérées d'Andræ ne restèrent pas sans effet, et sa campagne finit par être couronnée de succès. C'est ainsi que nous devons à l'initiative d'Andræ la célèbre expédition en umiak le long de la côte est du Grœnland en 1883–85, dirigée par Gustav Holm et T. V. Garde, ainsi qu'un nombre d'autres expéditions d'exploration qui suivirent. Mais le résultat le plus important d'Andræ fut peut-être justement d'attirer l'attention sur « le droit et le devoir incontestables du Danemark plus que de tout autre peuple d'explorer ce pays danois depuis des siècles qu'est le Grœnland occidental ».

Andræ était d'avis qu'il ne serait pas juste d'imposer les formes de la civilisation moderne à l'existence primitive des Esquimaux. Ce point de vue a été partagé par l'administration danoise du Grœnland jusqu'à l'époque actuelle, où on essaye de forcer le développement.

La pensée fondamentale d'Andræ avait été que conformément aux points de vue avancés (en 1814) par M. Wormskiold dans son ouvrage: « Faits anciens et nouveaux sur la position présumée du Grœnland, du Viinland, et de quelques autres pays connus par nos ancêtres », et que partageait également Nordenskjöld, le vieil évêché scandinave de Gárdar se serait trouvé sur la côte est et que subsidiairement les anciens Norrois auraient navigué sur la côte est. Comme plus tard les fouilles danoises faites à Igaliko, Kagsiarsuk, Ikigait l'ont montré, la première présomption d'Andræ était erronée, mais l'autre justifiée.

On a un autre exemple de ce qu'Andræ pouvait se tromper et travailler d'une certaine manière contre le cours des événements, bien que beaucoup de ses points de vue fussent corrects et le restent en partie encore de nos jours. Il s'agit du débat soulevé en 1876 au Landsting sur la proposition de loi sur l'introduction au Danemark du système métrique des poids et mesures. Andræ fut — comme tant de fois — presque seul contre le Landsting, qui ne réussit tout de même pas à introduire le système métrique cette fois-là. Il ne fut adopté que trente ans plus tard, par la loi du $^{4}/_{5}$ 1907. Les points de vue d'Andræ ressortent de ce qui suit: « Je suis rassasié de réformes à un tel point que je regarde ces soi-disant réformes avec une certaine malveillance ... Le plus souvent je n'y vois que ce que dit le mot lui-même, soit des changements ... et qu'on ne se soucie que très peu de savoir si c'est vraiment une amélioration qui a lieu ... L'essentiel, c'est que c'est quelque chose de nouveau ... et c'est pourquoi on le veut, peu importe si c'est convenable ou non, peu importe si la grande masse de la population en soupirera pendant des siècles ... Les théoriciens se sont mis dans la tête que c'est un grand progrès européen qui va se réaliser, et puis, que tous les autres se taisent — et ils se taisent ».

Andræ mentionne le changement du système monétaire, pour lequel il avait voté lui-même, mais il prétend que ce fut une nécessité qui s'imposait gravement, parce que nous n'étions pas en état de dominer nous-mêmes la valeur de la monnaie. De même Andræ fait remarquer que la réforme du système monétaire ne portait que sur le rapport de deux unités, puisque, en réalité, on ne faisait qu'appeler couronne la pièce de trois marks, et supprimer l'écu, qui correspondait à deux couronnes. Andræ pensait pourtant que toutes les notions de valeur seraient attachées à l'écu, en raison de la grande simplicité d'une division et d'une multiplication par 2. Dans cet ordre d'idées il convient de signaler qu'on se sert encore parfois aujourd'hui du mot écu au Danemark. Le rapport entre pied et mètre est tout différent, car ici il est question d'un coefficient de conversion qui n'est pas simple. Andræ prétend que le mètre est une mesure qui n'est pas du tout naturelle, par opposition à l'unité du pied, basée sur le pas de l'homme, et à l'unité du pouce, rattachée à la main de l'homme. De plus il soutient que le mètre est trop long et pas aussi utile que l'aune. Évidemment, Andræ voit bien les avantages que présente le système décimal, mais, ce qu'il fait remarquer avec justesse, on se servait déjà depuis longtemps de dixièmes de pouces, les soi-disant pouces décimaux, et de dixièmes des pouces décimaux, les lignes dites décimales, en tout cas dans les mesurages. Andræ fait une allusion plaisante aux habitudes des Français: « Demandez à n'importe qui en France: Quelle était la taille de Napoléon? Et il vous répondra: 5 pieds 2 pouces, et non 1678 millimètres, ce qui ne dit rien à un Français, tandis qu'il sait parfaitement ce que c'est que 62 pouces ». De plus Andræ souligne que pour les unités monétaires, on parle à Paris de 2 ou de 3 sous, alors que personne n'aura l'idée de dire 10 ou 15 centimes. Andræ relève les difficultés pour le paysan danois qui pourrait se trouver en face du calcul suivant: « Sur un terrain de 1 hectare, soit 1 hectomètre carré ou 10.000 mètres carrés, un paysan a récolté $3^{9}/_{10}$ mètres cubes ou 3900 litres de froment après avoir semé 240 litres seulement, parce qu'en cultivant la jachère, il l'a labourée et hersée à une profondeur de 25 cms après l'avoir fumée avec tant et tant de mètres cubes de fumier d'étable ». Ce long charabia ne signifie en réalité que ce qui suit: « Sur un arpent danois (de 55 ares) on a récolté 16 tonneaux de froment après avoir semé 1 tonneau seulement, le sol ayant été fumé par 23 chargements de fumier d'étable et labouré et hersé à une profondeur d'un peu plus de 9 pouces ».

Malgré sa première victoire, Andræ ne pouvait continuer à arrêter le développement. Mais d'autre part il faut reconnaître qu'aujourd'hui, près de cinquante ans après l'introduction du système métrique, l'emploi des vieilles unités n'a pas entièrement disparu. Il est vrai que dans le langage courant on ne parle pas de pieds ni de pouces, mais dans le commerce du bois et pour divers usages mécaniques on se sert toujours de ces unités. De même, il faut souligner que la ménagère qui fait son marché continue d'acheter par exemple les pommes de terre par demi-kilos au lieu de kilos, parce que le demi-kilo correspond à l'ancienne livre. Dans cet ordre idées, il est peut-être important que les prix semblent moins élevés lorsqu'ils sont indiqués en demi-kilos que lorsqu'ils sont indiqués en kilos entiers. L'idée principale d'Andræ est qu'il faut se préoccuper du petit homme et lui faciliter son travail. Les gens qui ont vraiment besoin de calculer, savent bien le faire, même s'il faut compter en unités qui varient selon les pays. Et il ajoute: « Je ne m'y connais pas mal, moi, et je sais comme c'est facile ».

Chapitre V.

L'histoire de la géodésie et de la topographie au Danemark avant Andræ (1636–1853).

Avant d'aborder l'étude de l'œuvre géodésique d'Andræ, il faut jeter un regard en arrière sur l'histoire de la géodésie et de la topographie au Danemark. On trouvera un historique détaillé de l'ensemble des travaux cartographiques qui précèdent l'établissement d'une carte du Danemark — soit des cartes générales à petites échelles, soit des cartes de détail à grandes échelles — dans « La Cartographie du Danemark » par M. N. E. Nörlund, directeur actuel de l'Institut Géodésique du Danemark. Il ressort de cet ouvrage, dont seule la première partie a paru jusqu'à présent, et qui est un in-folio monumental enrichi d'un nombre de reproductions splendides de cartes du Danemark, que les travaux cartographiques les plus importants antérieurs à l'époque d'Andræ sont dus à Johannes Mejer et à l'activité de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark.

Johannes Mejer (1606–74), qui dressa ses cartes de 1636 à 1674, s'appuya sur des mesures de latitude et des reconnaissances étendues sur le terrain, mais sans se baser sur une véritable triangulation. Ses cartes n'ont été publiées que tout récemment en un recueil de 3 volumes également par les soins de M. N. E. Nörlund. L'exposé que Johannes Mejer fait de la topographie du Danemark est de beaucoup supérieur à tout ce que d'autres ont fait avant son temps, et les cartes n'ont été surpassées que par l'œuvre cartographique de l'Académie.

Pour le travail cartographique organisé par l'Académie, on employa pour la première fois au Danemark une base rationnelle de mesurage sous forme d'une triangulation s'étendant sur tout le pays. Le travail dura un très grand nombre d'années, ayant été commencé en 1757 pour n'être achevé qu'en 1842, lorsque la reproduction des cartes fut confiée à la Section Topographique de l'État-Major, qui venait d'être créée cette année-là. Le mesurage proprement dit avait cependant été terminé en 1821. L'activité cartographique de l'Académie était due à l'initiative du jeune cartographe Peter Koefoed (1728–60), qui avait fait à l'Académie une offre de reproduction cartographique, mais après sa mort prématurée ce fut surtout l'astronome Thomas Bugge (1740–1815), qui avait été l'adjoint de Koefoed depuis 1759, qui influença le travail, d'abord comme arpenteur et triangulateur depuis 1762, ensuite comme conducteur de l'Arpentage économique depuis 1765, et enfin depuis 1768 comme arpenteur supérieur.

Thomas Bugge fut nommé plus tard professeur de mathématiques et d'astronomie à l'Université de Copenhague et directeur de l'Observatoire (1777), de même que conseiller d'État, et dirigea les travaux cartographiques de l'Académie pendant les années 1780–1815. Élu membre de l'Académie en 1775, il en fut le secrétaire pendant les années 1801–15.

On ne peut nier que la durée de plus de 80 ans ne portât un certain préjudice aux travaux, d'autant plus qu'au cours des années les méthodes se stabilisèrent, sans qu'on profitât des progrès théoriques et pratiques réalisés à l'étranger par la science géodésique.

En fait Thomas Bugge frustra les espérances qu'on avait mises en lui — non seulement comme géodésien et cartographe, mais aussi comme astronome — car dans la patrie de Tycho Brahe, d'Ole Römer et de Peder Horrebow on avait cru trouver en lui un continuateur des grandes traditions scientifiques du pays. Cependant la critique n'apparut que dans les dernières années de sa vie; elle fut élevée par son successeur au secrétariat de l'Académie, le célèbre physicien H. C. Örsted, et après la mort de Bugge par H. C. Schumacher et, plus tard, par Andræ.

Certes, cette critique n'est pas sans être à un certain degré justifiée, mais il ne faut pourtant pas méconnaître l'œuvre de Bugge. En effet, de grosses difficultés s'opposaient à la réalisation de ce grand travail, qui ne furent vaincues que par l'énergie et l'assiduité de Bugge, qualités dont il abusait au point de lasser ses confrères de l'Académie.

Après la mort de Bugge, H. C. Örsted proposa à l'Académie d'instituer une commission d'administration, constituée de 5 membres, du service d'arpentage et de cartographie, pour continuer et terminer le travail. Le successeur de Bugge à la chaire d'astronomie de l'Université de Copenhague, Heinrich Christian Schumacher (1780–1850), fut d'abord juriste et docteur en droit, puis, ayant étudié l'astronomie avec Gauss, il fut nommé en 1810 professeur extraordinaire d'astronomie à l'université. En 1813 il fut appelé comme directeur de l'Observatoire de Mannheim, mais revint à Copenhague en 1815 pour devenir le successeur de Bugge. En 1815 il fut élu membre de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres et nommé en 1816 directeur de la Mesure des Degrés Danoise, qui fut fondée sur son initiative. Élu membre de la commission d'arpentage en 1820, il déclina l'élection et fit à l'Académie sa critique du travail cartographique: « les cartes de l'Académie, quelque bonnes qu'elles fussent au début du travail, ne peuvent plus être considérées que comme arriérées, en raison des améliorations considérables apportées à tous les travaux de topographie pendant le long espace de temps qui a passé depuis lors, soit par suite du perfectionnement des instruments, soit pour d'autres raisons ». Le résultat en fut que Schumacher se chargea de continuer et de terminer le travail topographique en Holstein et que la topographie du Danemark fut confiée en 1842 au Service Topographique de l'État-Major.

L'insuffisance de l'œuvre de Bugge ne s'explique certes pas par un manque de capacité de sa part, mais plutôt par la multiplicité des travaux dont il fut chargé, parce qu'on voulait utiliser son rare sens pratique et son talent éminent pour le travail administratif. Le roi et le gouvernement profitèrent donc largement de ses dons. A titre d'exemple, je rappelle qu'on l'envoya à Paris en 1798 pour faire partie de la commission chargée par la République française de fixer les nouvelles unités des poids et mesures. Bugge eut donc le sort que subissent surtout les hommes doués à la fois de talents scientifiques et administratifs, d'être surchargés de travail. Chose curieuse, Schumacher, qui critique l'œuvre de Bugge — peut-être sans se rendre compte de ce fait, qui en tout cas est une des causes de son échec — devait se trouver bientôt dans exactement la même situation.

Schumacher commença la triangulation de la nouvelle mesure des degrés en 1816. Bugge, lui aussi, avait eu (en 1787) l'idée qu'on pouvait employer comme mesure des degrés danoise une triangulation établie sur une vaste échelle et s'étendant sur près de 4 degrés de latitude depuis Skagen jusqu'à l'Elbe. Cependant il avait tort en admettant que les mesures des angles de la triangulation de l'Académie fussent assez exactes, de sorte qu'il suffisait d'améliorer les mesures des bases.

Les lignes de bases de Bugge avaient été mesurées avec des règles en pin gras de 12 pieds de longueur et d'une section de 3 pouces de diamètre. Les extrémités des règles étaient garnies de laiton, limé à l'un des bouts et hémisphérique à l'autre. L'étalonnage avait été fait à l'aide d'une règle graduée en acier. Bugge avait pensé profiter des expériences que le général anglais Roy avait faites avec des règles en verre pour sa mesure de base faite en 1784 à Hounslow Heath. Bugge estima pouvoir faire ce travail, ainsi que les mesures astronomiques nécessaires aux extrémités de l'arc méridien, en une ou deux années, mais il n'y réussit pas. La rencontre qu'il fit à Paris, à la commission du mètre, de Borda, qui avait réalisé des travaux considérables pour la géodésie française, aurait dû l'inspirer et lui montrer de nouveaux chemins et des méthodes nouvelles. Dans sa préface à son ouvrage sur la Mesure des Degrés Danoise Andræ écrit: « Il n'est pas invraisemblable, bien que cela ne ressorte d'aucune manière du récit de son voyage, que Bugge ait été persuadé par cette connaissance que le travail ne pourrait être effectué aussi facilement qu'il l'avait cru au début. En tout cas il est certain qu'on abandonna plus tard définitivement l'idée de baser la mesure des degrés sur les mesurages de l'Académie, résultat qu'on ne peut qu'approuver, étant donné que, quelque satisfaisants qu'ils fussent pour leur propre but, ceux-ci manquaient certainement d'exactitude pour cette autre fin. Mais il est sûrement regrettable que l'intérêt pour les triangulations mêmes s'en trouvât également affaibli à un tel degré qu'on n'a jamais réussi, ni Bugge ni ses successeurs, à terminer ni à publier une étude complète sur elles, alors qu'elles ont été employées non seulement pour les travaux qui ont assuré, au cours de ce dernier siècle, aux cartes danoises la place éminente qu'elles occupent à côté de celles du célèbre Cassini, mais aussi plus tard, à maintes occasions et jusqu'à nos jours, comme base de travaux cartographiques plus ou moins complets ».

Ainsi, comme déjà dit, Andræ critique les travaux de Bugge; nous voyons pourtant que ses remarques de la préface (1867) sont loin d'être aussi sévères que celles de son rapport à l'État-Major, où il motive la demande d'une nouvelle triangulation du Danemark. Le brouillon de ce rapport, conservé aux archives de l'Institut Géodésique et écrit de la main fine et distincte d'Andræ, montre son tempérament, l'écriture devenant de plus en plus illisible et l'orthographe de plus en plus défectueuse au fur et à mesure que le sujet et la critique l'emportent. Les objections principales portent sur la mesure de base et le mode de calcul, parce que la « compensation » que Bugge fit des observations — comme il était d'usage en ce temps-là jusqu'à ce que le célèbre traité de Legendre (1806): « Sur la méthode des moindres carrés » résolût le problème de la compensation d'une manière uniforme — visait une adaptation fortuite des mesures aux conditions géométriques du réseau. Pour ces raisons historiques il n'y aurait évidemment rien à reprocher à Bugge, si seulement, en se basant sur le fait que les mesurages avaient été compensés les uns par les autres, il n'en avait conclu qu'ils étaient dès lors satisfaisants.

Schumacher commença la triangulation de la nouvelle mesure des degrés en 1816, et au début le travail avança assez lentement. Il avait l'intention de former le réseau comme une croix, une longue chaîne allant en direction nord-sud de Skagen à Lauenbourg et une chaîne d'est à l'ouest, de Séeland à la côte ouest du Jutland, de sorte que le bras gauche de la croix fut très court. On ferait alors des mesures de base aux extrémités des bras les plus longs de la croix à Skagen, à Copenhague, et près de l'Elbe. De plus on avait l'intention de faire des mesures astronomiques de latitude aux extrémités de l'arc du méridien et au point de section du méridien et de la chaîne est-ouest, et à Copenhague. On avait projeté également de faire des mesures astronomiques des différences de longitude en employant des signaux de feu.

Schumacher entreprit avec enthousiasme le travail de mesurage des degrés qu'il avait proposé, et le roi Frederik VI, qui avait beaucoup de confiance aux capacités de Schumacher et qui aimait encourager un travail scientifique si vaste et si considérable, mit les fonds nécessaires à sa disposition. Le Danemark donna par là aux pays étrangers l'exemple de grands travaux géodésiques, et c'est à l'initiative danoise que fut entreprise la mesure des degrés hanovrienne à la suite de la danoise. Cela ressort de la correspondance de Schumacher avec Gauss. C'est ainsi que Schumacher écrit à Gauss en date du $^8/_6$ 1816: « Nun noch eine Sache, die mir sehr am Herzen liegt. Der König hat mir die nöthigen Fonds zu einer Gradmessung von Skagen bis Lauenburg ($4^1/_3{}^\circ$ der Breite) und eine Längengradmessung von Kopenhagen bis zur Westküste von Jütland ($4^2/_3$ Längengrade) bewilligt ... Sie können leicht denken, dass ich alles aufbieten werde, etwas so vollkommenes als möglich zu leisten, und hier ist es, wo ich mir Ihren Rath erbitte. Zeigen Sie mir doch an, worin Sie Verbesserung der gewöhnlichen Methoden wünschen, und entwerfen Sie mir den Plan der Berechnungen. Wäre es nicht möglich, dass Sie, oder Lindenau, oder alle beide, den Meridian durch Hannover fort bis gegen Gotha, oder bis an die bairischen Dreiecke führten, und dass wir dann gemeinschaftlich eine Grundlinie in der Gegend von Hamburg mässen? Die eine Grundlinie bei Gotha ist ja, meine ich, beinahe schon von Zach fertig? Ist dass, was Sie mir mitzutheilen haben, zuviel, um schriftlich abgemacht werden zu können, so laden Sie mich nur durch einen ostensibeln Brief, mit dem ich dann gleich zum Könige gehen werde, auf ein Rendez vous in Hamburg diesen Herbst ein, wo wir unsern ganzen Operationsplan verabreden können. Ich zweifle nicht, dass wenn Sie sonst Lust dazu haben, Ihre Regierung nicht jede Unterstützung dazu geben werde, und gegen diese können Sie auch gerne die Nachricht brauchen, dass der König von Dänemark mir bereits alle Fonds bewilligt habe, sonst bitte ich aber nichts öffentlich von dieser Gradmessung bekannt zu machen, bis Sie entweder sich zur Theilnahme entschlossen haben, oder bis ich sie allein vollführt habe. Wollen Sie in Ihrem Briefe an mich Ihr Vergnügen darüber bemerken, dass der König sich zu einer solchen wissenschaftlichen Operation entschlossen habe, so würden Sie ihm ein grosses Vergnügen machen (er hat mich express gefragt, was Sie wohl dazu sagen würden) und mir zu ähnlichen wissenschaftlichen Operationen in der Folge ein desto leichteres Gelingen bahnen ... ».

On voit clairement, ainsi que par d'autres lettres qu'il lui adressa, que Schumacher se considère toujours comme l'élève de Gauss et qu'il lui demande des renseignements sur les nouveautés de la science géodésique. Dès le 5 juillet 1816, Gauss répond à Schumacher: « Vor allen Dingen, theuerster Freund, meinen herzlichen Glückwunsch zu der herrlichen grossen Unternehmung, welche Sie mir in Ihrem letzten Briefe ankündigen. Diese Gradmessung in den k. dänischen Staaten wird uns, an sich schon, über die Gestalt der Erde schöne Aufschlüsse geben. Ich zweifle indessen gar nicht, dass es in Zukunft möglich zu machen seyn wird, Ihre Messungen durch das Königreich Hannover südlich fortzusetzen. In diesem Augenblicke kann ich zwar einen solchen Wunsch in H. noch nicht in Anregung bringen, da erst die Astronomie selbst noch so grosser Unterstützung bedarf: allein ich bin überzeugt, dass demnächst unsre Regierung, die auch die Wissenschaften gern unterstützt, dem glorreichen Beispiele Ihres trefflichen Königs folgen werde ».

Il lui offre aussi son aide, comme le montre la citation suivante: « Ueber die Art, die gemessenen Dreiecke im Calcul zu behandeln, habe ich mir eine eigne Methode entworfen, die aber für einen Brief viel zu weitläuftig seyn würde. In zukunft, falls ich bis dahin, wo Sie Ihre Dreyecke gemessen haben, sie nicht schon öffentlich bekannt gemacht haben sollte, werde ich mit Ihnen darüber umständlich conferiren: ja ich erbiete mich, die Berechnung der Hauptdreiecke selbst auf mich zu nehmen ».

En ce qui concerne le calcul, on fit en tout cas déjà quelques calculs provisoires du temps de Schumacher, mais le calcul définitif ne fut effectué que beaucoup plus tard, quand Andræ était devenu directeur de la Mesure des Degrés. Gauss et Schumacher échangèrent plusieurs lettres à ce sujet, mais comme il se montrait qu'un grand nombre de ces lettres s'égaraient, Gauss écrivit: « Ich frankiere diesen Brief, damit er sichere geht, nicht, und ersuchen Sie es mit Ihrer Antwort ebenso zu machen ». Gauss recommande là une méthode qui doit être considérée aussi de nos jours comme la méthode la plus sûre d'expédier une lettre! Le 10 septembre 1818 Gauss écrivit à Schumacher: « Ich eile, Ihnen, theuerster Freund, anzuzeugen, dass ich von unserm Minister Arnswaldt den Auftrag erhalten, die zur Verdindung einer Hannoverischen Triangulirung mit der Ihrigen nöthigen Messungen in Lüneburg vorzunehmen, und dazu das Nöthige mit Ihnen zu verabreden ».

Ainsi les formalités qui devaient assurer la collaboration dano-allemande étaient en règle. Entretemps Schumacher avait déjà mesuré un nombre de triangles de l'Elbe jusqu'à Als en reliant provisoirement ces mesures à la mesure des degrés hanovrienne projetée. Pendant les années 1819–21 on fit un nombre de déterminations de la latitude à l'aide d'un secteur zénithal Ramsden, instrument mis à la disposition de la Mesure des Degrés par le gouvernement anglais.

En 1820 on adopta une ligne de base commune des mesures des degrés danoise et hanovrienne, et en 1820–21 furent effectuées les mesures de cette ligne. Jusque-là le travail avait bien avancé au Danemark, mais désormais Schumacher eut d'autres intérêts ou plutôt d'autres missions, à l'instar de ce qui a été dit de Bugge plus haut. Par là son attention se trouva détournée, et les opérations n'avancèrent plus avec la même intensité. Comme déjà dit, Schumacher entreprit en 1820 les mesurages de l'Académie au Holstein, et ce travail absorba beaucoup de son énergie. En 1824 on réussit toutefois à terminer les mesures des angles à Lauenbourg, de manière à compléter les jonctions avec la triangulation hanovrienne. Mais ensuite le travail fut suspendu assez longtemps, pour n'être repris qu'en 1837 lorsqu'il fut nécessaire de joindre les triangulations danoise et suédoise. Comme la triangulation prussienne avait également avancé le long de la côte nord de l'Allemagne, on décida d'établir une chaîne de triangles reliant la triangulation séelandaise par Möen et Falster avec la triangulation allemande. On travailla fermement jusqu'au début de la guerre de 1848, qui suspendit de nouveau les travaux, et quand on allait les reprendre après les hostilités, Schumacher était mort. Afin de remettre en marche les mesures, le gouvernement institua en 1852 à Copenhague une commission sous la présidence de l'amiral Zahrtmann, et sur la proposition de cette commission, on décida de confier à Andræ la direction de la Mesure des Degrés Danoise.

Chapitre VI.

L'activité d'Andræ comme directeur des travaux pour la Mesure des Degrés Danoise (1853–84).

Or, Andræ obtint par là l'un des deux postes pour lesquels il se jugeait avec justesse — dans sa réponse déjà citée à la lettre du général Hansen, ministre de la Guerre, à l'École Militaire Supérieure — particulièrement qualifié. La planche 1 montre une des cartes annexées par Andræ à « La Mesure des Degrés Danoise » premier volume (publié en 1867), et permet de voir quel était en gros l'état des travaux au moment où Andræ prit la direction de ce service. De l'arc méridien projeté d'abord de Lauenbourg à Skagen on avait mesuré la partie méridionale qui consiste d'une partie ancienne allant des deux côtés de triangle hanovriens Lauenburg-Lüneburg et Lüneburg-Hambourg au côté de triangle Fakkebjerg-Lysabbel et d'une partie nouvelle qui continue vers le nord jusqu'au côté de triangle Dyret-Eiersbavnehöi. De l'arc parallèle projeté par Copenhague on avait mesuré une chaîne du côté de triangle Copenhague-Store Möllehöi au côté Dyret-Bögebjerg. En plus de la base hanovrienne à Braack (planche 2) déjà mentionnée, une ligne de base avait été mesurée dans l'île d'Amager (planche 3) à l'aide de l'appareil de base de Bessel. On avait fait un nombre de mesures d'azimut ainsi que des déterminations de latitude de 5 stations: Lauenburg, Lysabbel, Skagen, Copenhague, et Frederiksværk. Outre le travail projeté, on avait mesuré une chaîne de triangles du côté Copenhague-Store Möllehöi avec des jonctions avec la Suède et avec l'Allemagne par Vigerlöse et Kongsbjerg au côté Darserort-Hiddensö, ainsi qu'une chaîne de triangles reliant la chaîne, dont je viens de parler, de Vigerlöse-Darserort avec les stations de l'Allemagne du Nord Dietrichshagen, Hohen Schönberg et des stations du premier arc méridien, Fakkebjerg, Bungsberg, et Lubeck. Dans la préface de « La Mesure des Degrés Danoise », volume I, Andræ recense ce qui reste à faire d'après le plan de Schumacher.

« 1) Continuation de l'arc méridien de Dyret-Eiersbavnehöi à Skagen. C'est ici que les travaux furent arrêtés en 1847. Les deux stations immédiatement suivantes, Ellemandsbjerg et Laadnehöi, cependant, avaient été non seulement choisies et désignées de la manière habituelle, mais aussi déterminées par des visées de Dyret ainsi que d'Eiersbavnehöi, où les mesures devaient être considérées comme complètement terminées.

2) Mesure de la troisième ligne de base à Skagen.

3) Continuation du parallèle copenhaguois de l'arc méridien à la côte ouest de Jutland.

4) Détermination de la différence de longitude entre les deux points finals du parallèle mentionné ».

De ces points Andræ pensait pouvoir négliger provisoirement le point 2, étant donné que les deux mesures de bases déjà effectuées donneraient probablement une détermination suffisante du côté de triangle Dyret-Troldemosebanke pour que, actuellement en tout cas, il serait inutile de mesurer encore un côté de triangle bien qu'on l'eût projeté. Quant aux déterminations de longitude, il faut signaler le fait que depuis trente à quarante ans qu'existait la Mesure des Degrés Danoise les méthodes utilisant des signaux de feu étaient devenues complètement désuètes, l'introduction du télégraphe électrique ayant permis de transmettre d'une manière beaucoup plus simple les signaux horaires. Il était donc moins important d'effectuer des déterminations de longitude le long de l'arc parallèle, et par conséquent il était inutile également de continuer celui-ci à l'ouest de l'arc méridien jusqu'à la côte ouest du Jutland. Les points 2 et 3 pouvaient donc être écartés. Par contre, il y aurait lieu d'effectuer à l'aide du fil télégraphique une détermination de la différence de longitude entre Copenhague et Altona.

Pour les calculs des mesurages des degrés déjà effectués, la situation n'était pas très bonne, bien que Schumacher se rendît parfaitement compte de ce que la valeur de la mesure des degrés n'apparaîtrait qu'après l'étude des matériaux. Si l'on disposait déjà de quelques calculs, d'abord surtout des compensations de stations, aucun calcul d'ensemble n'avait été effectué. Dans le n° 333 des Astronomische Nachrichten, Bessel publie un calcul provisoire de l'arc méridien entre Lauenbourg et Lysabbel, mais ce calcul n'est que tout à fait provisoire. Par conséquent Andræ avait à envisager deux travaux, d'une part la continuation du point 1 de la liste de ce que Schumacher n'avait pas achevé, et de l'autre le calcul des mesures des degrés déjà effectuées. Ne se sentant pas en état de mener les deux travaux de front, il décida de commencer ses fonctions de directeur de la Mesure des Degrés en complétant les calculs des mesurages déjà effectués. Cette décision était conforme au rapport de la commission qui avait été instituée lors de la nomination d'Andræ. Au début on avait pensé faire effectuer ce calcul par deux ou trois officiers qualifiés, mais on commença par réduire ce chiffre à deux et plus tard à un seul, et ce fut Ravn, lieutenant de la Marine, qui fut employé comme assistant. Andræ loue les connaissances à la fois étendues et solides du lieutenant, ainsi que l'énergie avec laquelle il s'acquitta de sa mission.

A peine le travail fut il commencé, qu'Andræ se trouva dans la même situation que Schumacher et avant lui Bugge: d'autres missions l'obligèrent à se charger d'autres travaux, le forçant à porter ses intérêts ailleurs et affaiblissant l'énergie avec laquelle il aurait pu aborder l'étude de détail. En effet, ce fut cette même année 1854 qu'Andræ fut nommé ministre, et il lui était donc matériellement impossible pendant les quatre années de ses nouvelles fonctions de prendre part aux calculs, qui se heurtèrent à une autre grave difficulté, qui se présente toujours lorsqu'on se sert de vieilles mesures: on dispose rarement, en effet, de renseignements suffisants et complets sur les mesures, parce que les observateurs pensent en général qu'ils n'oublient rien et qu'ils n'ont donc pas besoin de consigner trop de détails dans les journaux, mais pour peu que quelques années passent avant l'effectuation des calculs, les observateurs ont disparu et leurs successeurs ont de grosses difficultés à compléter les notations sommaires et insuffisantes des journaux. Andræ regrette que des recherches laborieuses ne lui aient pas permis de combler dans le détail les lacunes fâcheuses. Comme, en plus, après la mort de Schumacher, il se passa un long espace de temps avant que les archives de la Mesure des Degrés fussent transmises à Andræ, le travail fut retardé davantage. Ces archives, enfin, se trouvaient dans un état déplorable. Elles consistaient en quelques carnets de notes, des calculs commencés, des brouillons, des esquisses, des lettres etc.

A la veille de la guerre de 1864 on réussit à terminer le manuscrit du premier volume, mais la guerre devait retarder l'impression, qui ne fut commencée qu'en 1865, la publication n'ayant lieu qu'en 1867. En plus du lieutenant Ravn le professeur C. A. F. Peters avait apporté une importante contribution aux observations et aux calculs, parce que, directeur de l'Observatoire d'Altona, il avait effectué la mesure et le calcul de la différence de longitude entre Copenhague et Altona, de même qu'il avait fait le calcul de la mesure de base à Braack ainsi que de toutes les mesures de latitude prises au moyen du secteur zénital de Ramsden.

Toutefois le premier volume ne traite pas le réseau entier de Schumacher, mais seulement la partie montrée à la planche 4. Plusieurs motifs sérieux ont déterminé cette limitation: premièrement le désir de faire dans le plus bref délai la jonction de la Suède avec l'Allemagne par le Danemark; deuxièmement l'existence d'une seule ligne de base, dont la longueur est tout à fait satisfaisante (ce qui n'est pas le cas de la ligne de base de Holstein, où la température des règles ne peut pas être considérée comme suffisamment précisée); troisièmement l'établissement d'un réseau partiel, borné naturellement par les stations de Refsnæs et de Klöveshöi par suite de l'arrangement spécial des mesures des angles juste à ces stations; et enfin, quatrièmement, l'adoption du plan de travail de l'État-Major pour ses cartes topographiques.

Le premier de ces motifs est aussi la conséquence de la participation du Danemark à la collaboration géodésique internationale, qui venait d'être établie. En effet, en 1862, sur l'initiative du général prussien Baeyer, avait été créée une organisation dite « La mesure des degrés inter-européenne », dont faisaient partie le Danemark, la Suède et la Norvège. La collaboration s'étendit constamment, et dès 1867, au moment où parut le premier volume, l'organisation fut nommée « La mesure des degrés européenne », pour devenir en 1886 « La mesure des degrés internationale ».

Il est très intéressant de constater que, environ 80 ans plus tard, quand on allait réaliser au Danemark, qui avait adhéré à la « Commission géodésique baltique », la jonction de la Suède avec l'Allemagne par le Danemark, on se borna également à la partie sélandaise du nouveau réseau danois (mesuré en 1930 env.).

De même que Schumacher se basait sur les travaux et les expériences de Gauss, Andræ utilise les travaux classiques de Gauss et de Bessel, tout en faisant, cependant, un examen critique tout à fait indépendant des théories, et par là il réussit à y apporter des améliorations plus ou moins importantes. Peters, dont je viens de parler, a relevé ce fait en termes très flatteurs en écrivant dans les Astronomische Nachrichten, vol. 73, n° 1741, les lignes suivantes: « Dieser (Andræ) hat die Formeln für die Ausgleichung der Winkel, so wie für die Berechnung der Lage der Dreieckspuncte und der Sicherheit dieser Bestimmungen vollständig entwickelt und ist zu Resultaten gelangt, die bei grösser Schärfe, in Bezug auf Eleganz alle bis dahin gefundenen übertreffen. Die vorliegende Schrift ist daher, ohne Zweifel, als die erste anzusehen, durch welche die Theorie der Berechnung geodätischer Dreiecksnetze, seit den classischen Schriften von Gauss und Bessel über denselben Gegenstand, wesentlich gefördert ist ».

De plus, Peters attire l'attention sur la documentation minutieuse d'Andræ, qui lui permit de déduire des corrections d'azimut précises soit pour l'influence de l'altitude de la station où l'on vise, soit pour la différence entre la ligne géodésique et la section normale qui y correspond — même si aucune de ces deux corrections n'a d'influence sur le calcul du réseau danois.

Peters souligne également l'apport d'Andræ dans le développement de la méthode des moindres carrés: « Durch ein ganz neues Verfahren bestimmt der Verfasser die Genauigkeit für irgend eine Function der ausgeglichenen Richtungen, und, als speciellen Fall davon, die Sicherheit, mit welcher die Lage jedes Dreieckspuncts ermittelt worden ... Bekanntlich hat Bessel in dem gemeinschaftlich mit Herrn General-lieutenant Baeyer herausgegebenen Werk, über die Gradmessung in Ostpreussen, die Ermittelung der mittleren Fehler der Winkelmessungen und der gefundenen Coordinaten der Dreieckspuncte nicht behandelt ».

Peters parle aussi des observations d'Andræ sur l'influence de la réfraction: « Bei der Ermittelung der mittleren Fehler der beobachteten Richtungen hat der Verfasser die Winkelmessungen auf Kirchthürmen, von den auf andern Stationen ausgeführten, und ausserdem die Fehler der über Land gehenden Richtungen, von den über Wasser beobachteten getrennt, und ist zu ganz interessanten Resultaten in Betreff der Unterschiede zwischen diesen Fehlern gelangt. Es stellt sich ganz entschieden heraus, dass die über Land beobachteten Richtungen mit grösseren Fehlern hehaftet sind, als die über Wasser beobachteten; und die grössere Unsicherheit der Winkelmessungen auf hohen Kirchthürmen tritt auch deutlich hervor ».

De même Peters mentionne la manière dont Andræ utilise le théorème de Legendre, qui lui permet de déduire des formules très précises: « Die Formeln sind demnach selbst zur Berechnung von Dreiecken, welche aus den am weitesten von einander entfernten Punkten eines Dreiecksnetzes gebildet werden, ausreichend ».

Le capitaine G. Zachariae, qui fut plus tard lieutenant-général et directeur de la Mesure des Degrés Danoise, fait également un compte rendu très élogieux du premier volume de la « Mesure des Degrés Danoise » dans la « Revue de mathématiques », Copenhague 1869. Zachariae relève aussi l'indépendance d'Andræ et la force de son raisonnement et signale les améliorations apportées occasionnellement aux travaux de Gauss et de Bessel. C'est ainsi qu'Andræ a rendu plus accessible la méthode de Bessel pour la compensation des stations et en a facilité l'application pratique, de même qu'il a indiqué divers procédés de contrôle.

Ensuite Zachariae rappelle l'étude qu'Andræ fit de la constatation de Gauss que le théorème de Legendre s'applique avec la même exactitude aux triangles sphéroïdiques qu'aux triangles sphériques; cette étude est d'autant plus claire et plus exacte qu'elle contient des membres d'un ordre de grandeur supérieur. Comme Andræ le dit lui-même, ces corrections sont d'une importance minime pour les triangles géodésiques ordinaires.

Zachariae parle également de l'ellipse d'erreur introduite par Andræ, qui forme le corollaire naturel de la théorie générale de compensation. Bessel n'a pas calculé l'erreur moyenne de ses résultats. Il n'a pas non plus formulé de théorie pour le calcul de l'erreur moyenne d'une fonction d'observations. Les géodésiens qui ont calculé plus tard des triangulations étendues d'après le procédé de Bessel, ont également renoncé à la détermination exacte des erreurs moyennes, qui le plus souvent, si elles ne sont pas laissées de côté, sont fixées par une estimation plus ou moins arbitraire. Andræ montre que la crainte générale de s'engager dans des calculs laborieux est tout à fait injustifiée, en tirant d'une manière simple et élégante des formules qui permettent la détermination de l'ellipse d'erreur.

Dans le « Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft », 12^{e} et 13^{e} années, Helmert publie une critique très détaillée de 74 pages de la « Mesure des Degrés Danoise » d'Andræ, mais comme cette critique porte également sur le second volume, nous allons nous occuper d'abord du contenu de celui-ci, qui est divisé en deux parties principales. La première partie traite la continuation de la chaîne de triangles séelandaise du côté de triangle Klöveshöi-Refsnæs au côté Lysabbel-Fakkebjerg, où le procédé est exactement le même que dans le premier volume. La seconde partie traite les mesures faites par Schumacher entre Lauenburg et Lysabbel (planche 5). Ces vieilles mesures, effectuées 50 ans plus tôt, ont créé beaucoup de difficultés, qu'on n'a pas pu toutes surmonter. On avait mesuré d'après la méthode de répétition, mais les calculs provisoires de Schumacher n'ont pas traité les mesures de manière uniforme. De plus, Schumacher en a « exclu comme douteuses un assez grand nombre, et s'il faut avouer que ce rejet est bien fondé, on ne peut prétendre que cela continue à être le cas, la concordance plus ou moins parfaite avec des observations considérées comme excellentes ayant exercé une influence injustifiée sur le choix. Beaucoup de séries d'observations qui concordent moins bien sont ainsi écartées, alors même qu'elles ont été effectuées dans des conditions aussi favorables ou bien peut-être même plus favorables que d'autres, qui ne sont pas rejetées, et inversement, on trouve souvent que des séries d'observations ont été retenues quand elles fournissent des valeurs concordantes, alors même qu'elles auraient dû être exclues d'après les règles ordinaires ». Or, Andræ choisit de procéder de manière à employer l'ensemble des observations, à moins que des notes des journaux d'observations ne justifient le rejet de ces observations. Évidemment on risque par ce procédé d'accepter des observations que Schumacher savait qu'on devait écarter sans en avoir fait de mention expresse. Peters fit un travail précieux pour les calculs nouveaux de la mesure de base à Braack. De plus, le capitaine Zachariae, professeur de géodésie à l'École Militaire, y contribua beaucoup à plusieurs reprises. Le deuxième volume de la « Mesure des Degrés Danoise » parut en 1872. Mais dès 1867 le travail de triangulation avait été continué dans la partie nord du Jutland, le capitaine Meldahl de l'État-Major ayant commencé les observations, qu'il poursuivit en 1868 et termina en 1870.

Helmert insiste sur l'importance de la mesure des degrés danoise pour la mesure des degrés internationale en ajoutant: « sie interessiren aber nicht nur durch dieses ihr Resultat, sondern in noch weit höherem Grade durch die Art, wie er aus den Beobachtungen gewonnen worden ist, und durch die darin enthaltene Ausbildung der Theorie ». C'est pourquoi Helmert désire faire dès lors une analyse de ce travail précieux sans attendre l'achèvement de la publication.

Helmert dit qu'Andræ se défiait de la valeur que Schumacher attribuait à la ligne de base de Braack, et il partage parfaitement ce scepticisme, qui est dû non seulement au fait qu'on pouvait relever un certain manque d'exactitude dans la détermination des corrections de température, mais aussi au fait qu'une différence de 1/30.000 de la longueur de la ligne de base avait pu se produire lorsque Peters soumit les mesurages de Schumacher à de nouveaux calculs. Plus tard Andræ fit une revision du calcul de Peters en se servant de certains coefficients de dilatation déterminés par Struve, et il trouva une valeur qui était de 1/100.000 inférieure à la valeur de Peters. Helmert indique encore une détermination faite par von Morozowicz, qui, en 1871, en effectua une double mesure nouvelle, donnant une valeur qui est encore de 1/200.000 inférieure à la valeur d'Andræ. A ce propos Helmert dit que l'exactitude de la ligne de base s'amortit tout à fait quand les chaînes de triangles sont très longues, ayant calculé que, basée sur la base de Copenhague, la base de Braack aura une valeur qui est de 1/20.000 inférieure à la valeur donnée par Morozowicz.

Helmert dit que le travail de compensation fut effectué en 5 parties, les unes entièrement indépendantes des autres, probablement surtout parce que les mesures se sont réparties tout naturellement en cinq parties: 1) la chaîne de Copenhague à Refsnæs-Klöveshöi, 2) la chaîne de la première chaîne à Darserort-Hiddensö, 3) la chaîne de Refsnæs-Klöveshöi à Lysabbel-Fakkebjerg, 4) la chaîne d'ici à Segeberg-Lübeck, et enfin 5) la chaîne d'ici à Lüneburg-Lauenbourg. Avec les moyens dont disposait Andræ il faut tenir pour impossible de compenser les cinq parties de ce réseau en une fois. Mais si on l'avait fait, on aurait pu établir une équation de condition de base, en tenant compte de la différence sus-mentionnée entre la mesure directe de Braack et la valeur obtenue par des calculs faits à travers le réseau.

Après ces remarques préliminaires, Helmert aborde l'examen systématique des deux premiers volumes de la « Mesure des Degrés Danoise ». Sa critique se divise en cinq points: « 1) Abriss der Ausgleichungsmethoden der Hauptdreieckskettcn, 2) Beobachtungsmethoden, Genauigkeitsuntersuchungen und dergleichen, 3) Secundäre Winkelbeobachtungen und Ausgleichungen, 4) Die Basismessungen, 5) Theoretische Betrachtungen über den Einfluss der Krümmung der Erdoberfläche auf die Netzbedingungsgleichungen.

ad 1) Helmert fait remarquer que grâce à sa méthode méticuleuse habituelle, Andræ « so ziemlich alle Fragen berührt, welche für die Ausgleichung der Dreiecksketten von Bedeutung sind, und zwar geschiet dies an der Hand des Beobachtungsmaterials in einer Vollständigkeit, wie wir sonst nirgends es angetroffen ».

Les trois premières des cinq chaînes partielles dont consiste le réseau danois, ont été compensées d'après la méthode que Bessel employa à la mesure des degrés de la Prusse orientale. « Verfasser hat aber diese Methode wesentlich vervollständigt; ganz besonders in Bezug auf die Fehlertheorie, welche Bessel eigentlich gar nicht in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen hatte, wenn man von einer mehr gelegentlichen Anwendung seiner Formel zur Berechnung des mittl. Fehlers vermittelnder Beobachtungen auf Stationsmessungen absieht ».

Après une description minutieuse de la compensation des stations d'Andræ, Helmert continue: « Im Hinblick auf die spätere Netzausgleichung hat man ferner die Stationsausgleichungen so zu führen, dass die unbekannten Winkel von einer Richtung ab gezählt werden, die in die Netzausgleichung eingeht. Dies ist auch bei der praktischen Ausführung der Rechnungen in dem vorliegenden Werke bis auf einen Fall beachtet, wo sich nun, wie man aus den später aufgeführten Formeln leicht erkennen wird, die Arbeit der Netzausgleichung un ein Geringes erhöht ».

Ayant mentionné la compensation du réseau, Helmert aborde l'erreur moyenne de l'unité de poids et le calcul de l'erreur moyenne d'une fonction de grandeurs d'observations compensées.

A ce propos, Helmert parle également de l'ellipse d'erreur d'Andræ: « Die Genauigkeit in der Bestimmung der Lage eines Triangulationspunctes wird vollständig durch die Fehlerellipse desselben charakterisirt ».

Helmert se réfère ici à une étude d'Andræ qui date du temps où il était ministre, et qui avait paru dans les « Astronomische Nachrichten « n° 1117: « Fehlerbestimmung bei der Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe mit dem Mess'tische ». A la fin de cet article, Andræ fait remarquer que le problème spécial qu'il a traité de l'ellipse d'erreur peut s'appliquer à toute compensation d'après la méthode des moindres carrés, quand il s'agit de deux éléments. Il finit par dire qu'évidemment un traitement pareil peut être fait à toute compensation quelconque où le nombre d'éléments est supérieur à 2.

De plus Helmert relève la différence entre la méthode de compensation d'Andræ et celle de Bessel. Il s'agit de deux choses: « Berücksichtigung der speciellen Genauigkeit der einzelnen Stationsbeobachtungen (auch wenn derselbe Beobachter am selben Instrument tätig war) sowie Weglassung der Nullpunctscorrectionen ».

Inutile de nous occuper spécialement du premier point, mais pour ce qui est du second, Andræ démontre d'une manière frappante « dass eine solche streng gar nicht zu bestimmen ist und der Versuch der Aufstellung einer strengen Formel zu nichts führt ».

Enfin Helmert dit que c'est une condition implicite de la justesse de la méthode de compensation de Bessel qu'on puisse négliger l'influence des erreurs de division de la limbe. Andræ procède comme on le faisait alors et pourtant il ne manque pas d'examiner dans un cas isolé l'influence des erreurs de division de la limbe. Une table fait ressortir très clairement les erreurs de division systématiques. « Im Allgemeinen ist das Schlussresultat, dass die Anwesenheit der Theilungsfehler geeignet ist, das Resultat der gewöhnlichen Ausgleichung nicht unerheblich vom günstigsten zu entfernen und selbst bei strenger Behandlung die Genauigkeit der Endwerthe wesentlich zu vermindern. Da die strenge Behandlung aber mühsam ist, so empfiehlt Verf., die Anordnung der Beobachtungen so zu treffen, dass schon die gewöhnliche Ausgleichung ausreicht ». Helmert dit ici qu'il aurait préféré un autre procédé, où on essaye de déterminer les erreurs de division systématiques pour les appliquer comme corrections.

Or, Helmert examine pareillement la théorie des mesures de répétition, qui avait été employée à deux des cinq réseaux partiels. La théorie de cette méthode de mesure a été traitée également par Bessel (1834), qui arrive à des formules assez commodes quand les lectures se répartissent avec régularité. Lorsque, par contre, la distribution est irrégulière, les formules sont moins commodes, mais ici Zachariae a trouvé un procédé d'après lequel on introduit et détermine certains multiplicateurs, éliminant ainsi les difficultés.

Ensuite Helmert fait des remarques très importantes sur les comparaisons d'Andræ des erreurs moyennes déterminées par les compensations des stations et de celles obtenues par les compensations du réseau qui en dérivent. C'est qu'Andræ fait remarquer que le procédé habituel des compensations du réseau ne peut d'aucune manière être tenu pour rigoureux, car dans ce cas les erreurs auraient dû être purement accidentelles, ce qu'elles ne sont pas. Helmert venait de publier, le 10 février 1872, un ouvrage: « Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Kvadrate », où il mentionne les mêmes faits. Cependant ses chiffres n'ont pas la même force probante que ceux donnés par la « Mesure des Degrés Danoise ». Il s'agit des faits suivants: « Schon wiederholt ist auch in dieser Zeitschrift auf den eigenthümlichen Umstand hingewiesen worden, dass aus der Netzausgleichung immer ein grösserer mittlerer Fehler der Beobachtungen als aus den Stationsausgleichungen und überhaupt aus den Widersprüchen der Messungen auf den für sich betrachteten Stationen resultirt ». Ainsi l'erreur moyenne pour les 5 réseaux partiels est portée de $1^1/_2$ à env. 3 fois la valeur initiale. Dans les cinq cas il est question d'un accroissement considérable de l'erreur moyenne, ce qui signifie, en d'autres termes, que l'erreur moyenne calculée d'abord à la compensation des stations ne répond pas aux faits réels, mais est plus grande, ce qui ne peut être dû qu'au fait qu'il s'agit d'erreurs systématiques constantes pour les visées isolées, erreurs qui sont cachées dans la compensation des stations pour ne ressortir qu'à celle du réseau.

Ce phénomène se manifeste toujours même à la triangulation moderne, où l'on emploie des instruments nouveaux, qui sont presque exempts d'erreurs de division et où l'on mesure soit par la méthode des séries complètes, soit d'après la méthode de Schreiber.

Enfin Helmert parle des équations de condition de réseau, c.-à-d. les équations aux côtés et aux angles, qui n'entraînent pas une discussion ultérieure, à l'exception des équations aux côtés des quadrilatères, qu'on employait alors souvent dans le réseau. Avant Andræ, on s'était rendu compte de ce que l'essentiel était d'établir celle des quatre équations aux côtés possibles qui contient les petits angles, mais ce fut la méthode de Zachariae, exposée pour la première fois dans le second volume de la « Mesure des Degrés Danoise », qui, la première, nous apprit de façon tout à fait rationnelle de combien de fois une des équations était meilleure qu'une des autres d'après une considération purement numérique.

Helmert fait remarquer que la règle de Zachariae ne trouve pas une entière application dans l'ouvrage d'Andræ, certainement parce que la plupart des équations aux côtés avaient déjà été établies avant que Zachariae formulât sa règle. « Was die Verwerthung desselben bei den in Bd. I und II enthaltenen Ausgleichungen anbetrifft, so kann nicht unerwähnt bleiben, dass eine solche im Allgemeinen *nicht* stattgefunden hat; vielleicht wohl nur aus dem Grunde der Zeitfolge in der Entwickelung der Arbeiten. Immerhin hätte wohl der schon lange bekannte Satz, dass es für die Schärfe der Rechnung nützlich sei, die spitzesten Winkel in die Seitengleichungen zu bringen, mehr Beachtung finden können, wenn auch andererseits zu constatiren ist, dass überall mit Benutzung der achten interpolirten Decimale des Logarithmus eine genügende Schärfe gewahrt wurde ».

Helmert mentionne là le chiffre de point introduit par Andræ, dont nous reparlerons avec plus de détail.

ad 2) Sur ce point Helmert dit que l'exactitude d'une triangulation se voit le plus facilement, sinon le mieux, par les erreurs de fermeture des triangles. Quant à la répartition des erreurs de fermeture, il arrive au résultat que celles de moyenne importance prédominent. Il indique également les causes diverses des erreurs relevées par Andræ dans le réseau géodésique: erreurs de division de la limbe, qui n'ont pas été entièrement éliminées par la méthode d'observation, réfraction latérale, équation personnelle au pointage du signal. Helmert souligne qu'Andræ ne fait pas mention de l'influence de la déviation de la verticale sur les mesures des angles, mais il fait remarquer d'autre part que dans un pays aussi plat que le Danemark les déviations de la verticale en relation avec les visées presque horizontales ne jouent aucun rôle. Comme sources d'erreur il faut citer également les éléments de centrage qui ont joué un grand rôle surtout par suite de leur grand nombre aux deux chaînes partielles allemandes. Même en procédant avec un soin minutieux on ne peut exclure la possibilité d'erreurs qui se sont introduites de cette manière. C'est que pour les deux réseaux partiels on ne s'est même pas servi de miroir solaire, mais de mires ordinaires ou de flèches d'églises, méthode de pointage qui entraîne des résultats décidément variables.

Helmert fait une description systématique de l'exactitude pour les 5 réseaux partiels et les 2 réseaux de base, en citant les erreurs moyennes, les nombres de triangles, les méthodes d'observation, les instruments, les longueurs des visées, et enfin la question de savoir si les visées passent entièrement ou partiellement au-dessus de l'eau ou de la terre.

Les mesures s'étant étendues sur une période très longue, et comme on a employé des méthodes d'observation différentes et des instruments différents, les matériaux recueillis ne permettent pas d'en tirer des conclusions certaines. Sans doute, cependant, les erreurs de division de la limbe, qui ne sont pas complètement éliminées, présentent la cause prédominante de l'erreur moyenne, mais il faut ajouter toutefois l'influence de la réfraction latérale. Je parlerai plus loin de l'opinion d'Andræ sur l'influence de la réfraction.

Helmert relève la grande importance des visées diagonales dans les réseaux géodésiques, étant donné que les équations de condition qui en résultent servent beaucoup plus que les équations aux angles à déterminer le réseau.

ad 3) Helmert mentionne la détermination qu'a faite Andræ de points secondaires, particulièrement des 18 points secondaires près de Copenhague, qui ont été déterminés par des coordonnées polaires pour lesquelles ont été introduites des valeurs approximatives, les valeurs provisoires étant ensuite corrigées par compensation.

ad 4) Helmert attire l'attention sur la mesure de base d'Amager, où les observations ainsi que les calculs ont été effectués essentiellement d'après la méthode de Bessel. Comme il n'y a pas assez de mesures de répétition pour permettre de se faire une idée précise de l'erreur moyenne, Andræ a introduit dans le calcul des erreurs moyennes tirées d'autres mesures semblables. Le réseau de base donne un agrandissement de 12 fois la base même, et Helmert le considère comme « das wohlgeformte und vielfach verstrebte Basisnet ».

ad 5) A ce propos Helmert fait des remarques sur les solides considérations théoriques d'Andræ concernant les corrections d'azimut des sections normales à cause de l'altitude de l'objet, la courbure de la verticale et la différence des angles des deux sections normales. Andræ confirme que toutes ses grandeurs sont sans importance pour les triangles danois.

Andræ s'imagine que les côtés de triangles sont formés de lignes géodésiques, et il pense, de même que Helmert, qu'elles sont les courbes les mieux appropriées qui réunissent d'une manière uniforme deux points sur l'ellipsoïde de rotation. Helmert dit qu'Andræ fut le premier à introduire la soi-disant « Feldlinie » (courbe d'alignement) ou, comme on l'appela par la suite, « Absteckungskurbe », exactement de la même manière que Bremicker le fit plus tard (1869), mais tout à fait indépendamment d'Andræ. La courbe est mentionnée également dans la « Geodesy » de Clarke (1880) sous le nom de « Curve of Alignment », mais cet auteur en parle déjà en 1858 dans son ouvrage « Account of the Observations and Calculations, of the Principal Triangulation; and of the Figure, Dimensions and Mean Specific Gravity, of the Earth as derived therefrom » (p. 237), sans cependant lui donner de nom particulier. C'est donc en réalité à Clarke que revient l'invention de cette courbe intéressante. Tandis que Bremicker se sert exclusivement pour ses calculs de sections normales et de cordes et ne relève pas les avantages éventuels de la courbe d'alignement, Andræ emploie les lignes géodésiques, qui ont la qualité spéciale que toute partie en est aussi une ligne géodésique, de même que toute ligne géodésique peut être considérée comme une partie d'une ligne géodésique plus grande, ce qui ne s'applique pas à la courbe d'alignement. Par opposition à la courbe d'alignement, la ligne géodésique forme un angle avec la section normale où se trouve la ligne de visée. La courbe d'alignement se rattache éminemment aux deux extrémités et peut être définie comme le lieu géométrique des points où le plan normal de l'ellipsoïde qui passe par une des extrémités passe également par l'autre. Par une formule un peu populaire, on peut s'exprimer comme suit: La courbe d'alignement se trouve partout verticalement au-dessus de la corde.

Helmert indique que pour les triangles géodésiques ordinaires, il est parfaitement indifférent qu'on se serve de l'une ou de l'autre des courbes, mais pour les grandes distances il pense, dans la « Zeitschrift für Mathematik und Fysik » (1870), avoir constaté que la courbe d'alignement ne présente que des défauts. Helmert souligne comment Andræ trouve d'une manière très simple l'expression de la différence de longueur entre la ligne géodésique et la section normale. De plus Helmert relève qu'Andræ déduit très élégamment l'expression de la différence d'azimut entre la ligne géodésique et la section normale. Dans un appendice au premier volume, Andræ dit qu'on devrait apporter une correction pareille à la différence d'azimut à cause de la forme sphéroïdique des couches de l'air et la réfraction latérale qui en résulte. Cependant les coefficients sont ici de faible importance. Le géodésien Sonderhof a traité ce problème (1870) d'une manière très simple dans les « Archives de Grunert », vol. 51, et il est arrivé au résultat que l'influence est minime, soit $^1/_7$ de l'élément principal de la formule de la différence d'azimut entre la ligne géodésique et la section normale.

Pour terminer, Helmert parle de la généralisation que fait Andræ du théorème de Legendre relatif aux triangles sphériques en l'appliquant aux triangles sphéroïdiques. Andræ déduit diverses formules élégantes pour l'excès sphéroïdique et introduit des membres d'un ordre supérieur afin de pouvoir comparer ses formules avec les formules correspondantes de Hansen.

La troisième partie de la « Mesure des Degrés Danoise » parut en 1878. Les mesures effectuées par le capitaine Meldahl entre le côté de triangle Troldemosebanke-Dyret et l'extrémité nord du réseau de Skagen avaient été terminées dès 1870, nous l'avons dit, donc avant la publication du deuxième volume (planche 6). La première partie du volume contient le calcul de ce réseau, où on s'est servi également de la méthode de Bessel. Pour réduire l'influence des erreurs de division de la limbe, les séries ont été soigneusement réparties sur un grand nombre de lieux situés symétriquement par rapport à la limbe. On voit ainsi qu'Andræ a devancé la critique que Helmert a faite de son élimination défectueuse des erreurs de division. Andræ sait bien que la méthode déjà louée par Gauss et son élève Gerling doit être considérée comme idéale, et c'est à peu près à la même époque également que le général Schreiber l'emploie à la perfection. Andræ pense cependant, et sans doute à juste titre, que pour un réseau aussi simple que la partie septentrionale du réseau danois, une mesure soigneuse faite d'après la méthode des séries sera presque aussi bonne.

Andræ attire l'attention sur le fait qu'il a été nécessaire de refaire le mesurage du triangle le plus septentrional du Jutland, mesuré par Schumacher en 1847, et que les deux mesurages ont montré « d'une manière univoque que la position relative des trois angles de triangle, marqués par de solides piédestaux de granite, a subi un changement étrange au cours des années 1847–66. On reconnaîtra facilement l'importance décisive qu'il faut attacher à une telle mobilité des points fixes du terrain, car de ce fait les bases sur lesquelles s'appuient toutes les triangulations antérieures, sont complètement anéanties, et la géodésie s'en trouve en présence de nouvelles tâches étendues, dont l'accomplissement pose les plus grandes difficultés ».

La deuxième partie du troisième volume étudie la chaîne de triangles déjà effectuée pendant les années 1833–41 du côté de triangle Vigerlöse-Darserort le long de la côte de l'Allemagne du Nord jusqu'au réseau de Jutland. Le calcul a été effectué avec des jonctions au réseau de Séeland exclusivement, et plus tard, dans la troisième partie, une compensation finale a été faite du réseau entre Knivsbjerg-Lerbjerg et Vigerlöse-Darserort.

Enfin, la quatrième partie contient le calcul final des coordonnées géographiques de l'ensemble des stations ainsi que des azimuts pour tous les côtés du réseau.

Jusqu'en 1873, tous les calculs furent faits par le capitaine Ravn, le futur vice-amiral, mais lorsqu'il fut nommé, cette année-là, ministre de la Marine du cabinet Holstein-Holsteinborg, Andræ dut chercher un remplaçant. Heureusement il réussit à décider le capitaine Zachariae à se charger du travail, pour lequel il possédait toutes les connaissances utiles. Le capitaine Meldahl avait cependant déjà assisté aux calculs, particulièrement pour les compensations des stations.

Enfin, en 1884, parut le quatrième volume de la « Mesure des Degrés Danoise » contenant des observations astronomiques effectuées essentiellement par le professeur Peters. La première partie traite la détermination faite en 1863 de la différence de longitude entre les observatoires de Copenhague et d'Altona. La seconde partie traite d'une manière correspondante les mesures de latitude effectuées à l'aide d'un secteur zénithal Ramsden pendant les années 1856–61. La troisième partie expose les déterminations d'azimuts faites par le capitaine Meldahl en 1870.

Le but final de toute mesure des degrés étant de fournir des renseignements sur la forme et la grandeur du sphéroïde, Andræ fit cette dernière étude surtout par intérêt théorique. Comme d'habitude, il établit ici aussi par des déductions originales les formules nécessaires, qui ont servi aux mesures danoises. Il va de soi, toutefois, comme le montre également le résultat obtenu, qu'on ne peut pas, en se basant sur les mesures d'un seul pays, surtout d'un petit pays, tirer des conclusions suffisamment précises sur les changements des constantes de la surface de référence.

Dans cet ordre d'idées il faut préciser nettement que la surface de référence qui, sous le nom de Sphéroïde danois, fut employée par le Service Topographique de l'État-Major jusqu'à sa réunion, en vertu de la loi du premier avril 1928, à la Mesure des Degrés Danoise, pour être remplacée alors par l'ellipsoïde international, adopté sur la base des calculs de Hayford à la session de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale tenue à Madrid au mois d'octobre 1924, n'est pas, comme on le croit souvent erronément, celle qui ressort des calculs d'Andræ.

Le sphéroïde danois fut adopté avant la publication de l'ellipsoïde de Bessel, qui, exposé dans le célèbre mémoire des « Astronomische Nachrichten » n° 333 (1837), devait trouver plus tard un emploi très général. Le sphéroïde danois n'est pas le résultat d'une compensation particulière des mesures des degrés des divers pays, mais fut fixé indépendamment sur la base surtout des compensations effectuées en 1819 par Walbeck et en 1830 par Schmidt.

Zachariae et Meldahl avaient assisté de nouveau tous deux aux calculs du quatrième volume. Ayant terminé le travail commencé par Schumacher, Andræ se démit de ses hautes fonctions de directeur des travaux géodésiques pour la Mesure des Degrés et confia la suite de travail à Zachariae, qui, entretemps, avait été promu lieutenant-colonel.

Chapitre VII.

La collaboration internationale d'Andræ.

Après avoir examiné la part prise par Andræ à la mesure des degrés proprement dite, nous allons nous occuper de plus près des détails que nous n'avons traités jusqu'ici que superficiellement. J'ai mentionné la participation du Danemark à la collaboration internationale. Toutefois, il faut reconnaître qu'au commencement l'apport danois se bornait à l'initiative, très importante il est vrai, prise par Schumacher pour réaliser la triangulation dano-allemande et la détermination de la différence de longitudes astronomiques entre Copenhague et Altona. Ces deux travaux, cependant, étaient terminés avant le début officiel de la collaboration internationale à la « ersten allgemeinen Conferenz der Bevollmächtigten zur Mittel-Europäischen Gradmessung vom 15. bis 22. October 1864 » à Berlin. La collaboration internationale elle-même était dirigée par la Commission dite « permanente », composée au début de 7 membres seulement. Pendant la période où Andræ fut directeur, il y eut 7 sessions: à Berlin en 1864 et en 1867, à Vienne en 1870, à Dresde en 1874, à Stuttgart en 1877, à Munich en 1880 et à Rome en 1883, mais Andræ n'assista à aucune de ces conférences. La Commission permanente, qui fut en même temps bureau central, était composée du général Baeyer, premier président, Hansen, président secondaire, Ricci, vice-président I., von Struve, vice-président II., Kaiser, vice-président III., Bruhns, secrétaire, et Hirsch, secrétaire. Dans le premier rapport qu'il fit à la commission permanente au congrès de Berlin en 1867, Bruhns parle sommairement de la mesure des degrés danoise: « Im Norden Europa's, in Skandinavien, sind nach dem gegebenen Berichte mehrfache geodätische und astronomische Messungen ausgeführt. In Dänemark ist der erste Theil der schon längst vollendeten Gradmessungsarbeiten durch den Geheimen Etatsrath Andræ publicirt ».

A la quatrième session de la commission, tenue à Dresde en 1874, la mesure des degrés danoise est mentionnée de nouveau: « En 1872 a paru le 2^{d} volume de la mesure des degrés en Danemark. Il est très important et renferme la triangulation entre Refsnäs-Cleveshöi et Lyssabel-Fackebjerg jusqu'à Lüneburg-Lauenbourg, de précieuses notices complémentaires sur la théorie de la mesure des angles, sur les calculs de compensation, et sur les erreurs instrumentales; enfin un rapport de M. Peters sur le nouveau calcul de la base mesurée par Schumacher près de Braack ». A la fin du rapport de la quatrième session de la commission à Dresde en 1874, on trouve pour la première fois un rapport présenté par le Danemark sur les travaux effectués. Ce memorandum traite pour l'essentiel la triangulation du Nord du Jutland, formant la base du troisième volume de la « Mesure des Degrés Danoise ». Daté du 31 janvier 1875, il a donc paru après la clôture de la quatrième session, mais, comme il ressort de ce qui précède, on l'a considéré comme se rapportant à ce congrès. Le compte rendu de la cinquième session de la commission permanente, tenue à Stuttgart en 1877 signale simplement la publication du deuxième volume de la « Mesure des Degrés Danoise » et annonce la publication prochaine des troisième et quatrième volumes. De plus, on trouve dans le compte rendu de cette cinquième session une liste complète des lignes de base qui ont été mesurées. Parmi elles figurent la ligne de base danoise d'Amager, mesurée par Andræ, ainsi que la base de Braack, mesurée d'abord par Schumacher en 1821 et ensuite par von Morozowicz en 1871.

Dans l'intervalle des sessions de la commission, qui ont lieu tous les trois ans, la commission permanente se réunit une fois par an, et dans une de ces réunions, tenue à Bruxelles au mois d'octobre 1876, on posa les deux questions suivantes, désignées par 5a et 5b:

« a) Soll man bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes, welches zwei Grundlinien oder Anschlussseiten verbindet, als Bedingungsgleichung die vollständige Uebereinsstimmung beide Grundlinien oder Seiten einführen?

b) Ueber die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes nach Gruppen? »

Pour la conférence de Stuttgart, tenue en 1877, Andræ envoya une note datée du 27 août 1877, où il se prononce sur les deux questions 5a et 5b.

« Es kann die Erde nur im Grossen und Ganzen als ein elliptisches Rotationssphäroid betrachtet werden. Da die Dichtigkeiten in den Schichten der festen Erdrinde sehr unregelmässig vertheilt sind, und da die physische Oberfläche überall kleinere oder grössere Erhöhungen und Vertiefungen darbietet, muss die wirkliche oder *mathematische* Oberfläche der Erde, welche durch die von der mittleren Meereshöhe ausgehende Niveaufläche definirt wird, auch nothwendig eine ganz unregelmässige Form haben. Es heisst daher, wie schon Gauss bemerkt hat, den Gegenstand aus einem falsche Gesichtspunkte betrachten, wenn man nur von *Local*ablenkungen der Lothlinie spricht, indem solche Abweichungen *überall* erwartet werden müssen und nur ganz ausnahmsweise in einzelnen Punkten verschwinden können. Alle bisherigen Gradmessungen haben aber die Möglichkeit bewiesen, eine sphäroidische, ebenfalls von der mittleren Meereshöhe ausgehende, elliptische Rotationsfläche bestimmen zu können, an welche sich die mathematische Oberfläche mit ihren überall vorkommenden wellenförmigen Unebenheiten so genau anschmiegt, dass der Abstand zwischen beiden Flächen oft nur einige Zoll beträgt und in der Regel kaum einige Fuss überschreitet. Es ist die Aufgabe der Gradmessungen, *diese sphäroidische Fläche* für die ganze Erde, oder für gegebene Theile derselben, zu bestimmen ».

Ensuite Andræ fait remarquer que les corrections à apporter aux angles mesurés par suite des déviations de la verticale sont généralement si petites qu'on peut les négliger tout à fait. Il n'y aura lieu de faire des corrections considérables qu'en pays montagneux.

Pour les calculs sur le sphéroïde il faut présumer des valeurs provisoires pour le demi-grand axe et l'aplatissement. Mais il existe déjà à l'heure actuelle de si bonnes valeurs pour ces grandeurs qu'on peut en tenir compte en toute confiance. Il y aurait tout au plus lieu de déterminer les corrections des grandeurs préliminaires en cas de compensations globales étendues.

Andræ aborde aussi la discussion de la possibilité d'effectuer des compensations étendues rigoureusement exactes. Il est d'avis qu'il est absolument nécessaire de diviser les réseaux de triangles en plusieurs groupes pour éviter que le travail soit tout à fait irréalisable. Andræ se déclare entièrement d'accord sur une proposition avancée par Peters, en précisant que les lignes de base doivent être considérées comme absolument correctes et qu'il ne faut faire de menues corrections que pour les azimuts des côtés de triangles.

A la cinquième session, tenue à Stuttgart, Andræ présenta un nouveau travail théorique. Il y déclare que le but des mesures géodésiques est de déterminer la position relative des points de triangles sur le sphéroïde. Par contre, on ne peut pas considérer les coordonnées géographiques calculées pour les points de réseau comme définitives. C'est qu'elles dépendent de l'exactitude du point d'origine du réseau et des constantes de l'ellipsoïde définitif, mais ces faits exercent une influence si minime qu'on peut sans aucun risque considérer un terrain de mesure comme relativement tout à fait exact.

Du rapport de la sixième session de la commission, tenue à Munich en 1880, il ressort que le troisième volume de la « Mesure des Degrés Danoise » a paru et que le quatrième est sous presse. Le rapport contient la liste complète des déterminations de longitudes astronomiques qu'on a effectuées, par exemple, pour le Danemark, les déterminations entre Copenhague et Altona. Ensuite on mentionne la détermination de longitude entre Copenhague, Kristiania et Stockholm, de même qu'entre Copenhague et Lund, dont les réductions n'étaient pourtant pas encore terminées. De plus il y a une liste des stations trigonométriques danoises avec indication de la latitude et de la longitude, de la date de la mesure, des noms de ceux qui les avaient faites et dirigées, ainsi que de l'instrument dont on s'est servi, et enfin des références à la publication des résultats. A la session de Munich furent faites plusieurs communications, dont une conférence de Carl von Bauernfeind: « Ueber Refractions-Beobachtungen ». Dans cette conférence, l'auteur se réfère à une lettre d'Andræ, où celui-ci dit qu'il pense avoir constaté des réfractions latérales. Toutefois il n'en est pas certain, mais il croit que la réfraction latérale grandit en proportion de la distance. Bauernfeind ajoute: « Es darf daher wohl erwartet werden, dass der berühmte dänische Forscher seinen Gedanken weiter verfolgen und das Ergebnis, zu den es führt, durch den Druck veröffentlichen wird ».

Dans le rapport de la septième session, tenue à Rome en 1883, on trouve une liste détaillée des observations de latitude, contenant également celles du Danemark, où on indique la latitude, l'erreur probable, l'observateur et la méthode d'observation, ainsi que la date de l'observation et la référence bibliographique. On trouve en outre une liste complète des azimuts, aussi pour le Danemark, où on indique la station où l'azimut a été déterminé et celle vers laquelle cette détermination a été faite, l'observateur, l'étoile dont on s'est servi, l'année de l'observation ainsi que la référence à la publication des observations.

Ce n'est que lorsque Zachariae fut devenu directeur de la Mesure des Degrés Danoise que fut commencée une collaboration internationale plus intime, Zachariae prenant part aux diverses conférences et étant membre de la commission permanente. C'est ainsi qu'à la huitième session, tenue à Berlin en 1886, il fit un rapport où il annonçait que la mesure des degrés danoise était maintenant achevée et « von Sr. Excellenz Herrn Andræ in Kopenhagen herausgegeben ». A ce propos, Zachariae signale également qu'une partie des études théoriques qui se trouvent dans les quatre volumes de la « Mesure des Degrés Danoise » ont paru en une édition française en trois volumes, intitulée « Problème de haute Géodésie ».

Le rapport sur la neuvième conférence, tenue à Paris en 1889, contient un court historique de l'activité de la Mesure des Degrés Danoise. Enfin il convient de dire qu'à la 14ème conférence, tenue à Copenhague en 1903, le travail d'Andræ fut mentionné en termes très flatteurs. Le congrès fut ouvert par une allocution de Deuntzer, président du conseil et ministre des affaires étrangères, et parmi les congressistes se trouvaient les deux fils d'Andræ, Poul et Victor Andræ. Le directeur de la Mesure des Degrés, le général Zachariae, prononça ensuite le discours d'ouverture, où il dit entre autres choses: « Depuis des siècles, l'astronomie et la géodésie occupent une place dans notre civilisation. Les noms de Tycho Brahe, Ole Römer, Horrebow, Schumacher et Andræ en portent témoignage ». Ensuite parla le vice-président, le général Bassot, qui dit d'Andræ que c'était lui qui « par ses savantes analyses a trouvé les formules, devenues classiques, employées dans les calculs géodésiques ».

Chapitre VIII.

Études des problèmes spéciaux d'Andræ.

Au sujet du chiffre de point d'Andræ, que Helmert mentionne dans sa critique, il convient de signaler que, dans les Mémoires de l'Institut Géodésique de Danemark, Tome XI, l'auteur du présent livre a discuté l'importance de ce chiffre et a trouvé qu'il n'a en réalité aucune valeur. L'erreur moyenne du membre constant d'une équation aux côtés, contenant 6, respectivement 12 logarithmes, est ainsi $\pm$ 0.58, respectivement $\pm$ 0.81 en unités de la dernière décimale avant le chiffre de point, si on tient compte de celui-ci, et $\pm$ 0.87 respectivement $\pm$ 1.24 de la dernière décimale si on n'en tient pas compte.

Dans le même livre il a été signalé également que l'origine du chiffre de point d'Andræ est sans doute purement historique, étant donné qu'Andræ disposait d'une table de logarithmes de Vega qui avait 7 chiffres, mais pas de celle à 8 chiffres, qui, établie par J. Bauschinger et J. Peters, ne parut qu'en 1891 avec la division centésimale et seulement en 1910 avec la division sexagésimale ordinaire. Évidemment Andræ aurait pu se servir de la grande table de logarithmes de Vega à 10 chiffres, mais sans doute il trouvait cela trop ennuyeux et pensait pouvoir se contenter de 7 chiffres avec chiffre de point.

A ce propos je tiens à faire remarquer que le général Madsen a employé la méthode d'Andræ encore en 1908, mais qu'il s'est servi en 1916 de la table à 8 chiffres, qui venait de paraître. Dans le « Handbuch der Vermessungskunde », Jordan emploie normalement 7 chiffres sans chiffre de point, à l'exception d'un seul cas où les angles sont donnés en secondes avec 3 décimales, dans lequel cas il emploie 7 chiffres avec chiffre de point, sans toutefois motiver ce choix.

Le précis de géodésie de N. P. Johansen pour les cours du service de l'État-Major à l'École Militaire Supérieure, qui parut en 1912, emploie également le chiffre de point d'Andræ, qui a été adopté également pour l'enseignement donné à l'École Militaire et à l'École Polytechnique Civile jusqu'à ces dernières années.

Apparemment on a donc oublié que le chiffre de point d'Andræ n'a servi que d'expédient et on a continué à l'employer dans l'enseignement traditionnel. L'auteur de cette étude n'ignore cependant pas que dans d'autres pays également on s'est servi d'une manière pareille d'un chiffre de calcul sans importance.

L'intérêt qu'Andræ portait à la réfraction terrestre et à l'influence de celle-ci sur les mesures géodésiques date de très loin. C'est ainsi qu'il écrivait, le $^6/_7$ 1844, dans une lettre à son ami Læssöe: « Voici un petit traité sur la réfraction. En temps et lieux ordinaires, je suppose qu'on peut tenir la réfraction pour à peu près égale au même instant, indépendamment de la direction, pourvu qu'aucune des lignes de visées ne soit trop proche de la surface du terrain. Par contre, il ne faut jamais faire de déterminations d'altitude le matin ou le soir, ce qu'on se trouve facilement tenté de faire, l'air étant d'habitude très pur et très clair à ces moments de la journée. Avant 10 heures du matin et après 6 heures du soir la réfraction est en général complètement folle. Au contraire elle est raisonnable même dans le midi le plus gras ».

Il faut donc se méfier des mesurages qui s'accordent apparemment bien, parce que la réfraction est constante, mais peut-être tout de même anormale, tandis que par une réfraction toujours variable qui donne des résultats très variés on a l'espoir d'obtenir dans la moyenne une valeur plus exacte. Dans une lettre antérieure, il écrit à Læssöe à la date du $^{26}/_{9}$ 1842: « Sans doute j'ai beaucoup profité de mes travaux cet été; ils m'ont fait comprendre pas mal de choses que je ne savais pas avant. Entre autres, j'ai trouvé une méthode assez simple d'observer les distances zénithales réciproques simultanées pour les nivellements ».

Andræ fait allusion ici à sa méthode pour les mesures d'altitude trigonométriques. A ce moment-là le plan des travaux de l'État-Major venait de décider que des points trigonométriques importants devaient être nivelés trigonométriquement. M. O. Simonsen rapporte ce fait dans son livre « Zéro des nivellements de 1845–1945 en Séeland, Möen et Lolland-Falster, surtout à Copenhague et Frederiksberg », Copenhague 1949, où il dit qu'Andræ a formulé des équations pour le calcul des différences d'altitude à des distances zénithales réciproques qui ne sont pas simultanées. Il cherche à se passer des observations météorologiques, en opérant avec des distances zénithales mesurées réciproquement entre deux objets A et B ainsi qu'avec des distances zénithales d'ici à un troisième objet C. Par la méthode d'Andræ on a ainsi mesuré 4 distances zénithales, soit 2 dans chacun des points A et B, mais aucune dans le point C. Par ce procédé on obtient 4 équations pour la détermination du coefficient de réfraction des deux lieux d'observation et des deux différences d'altitude entre les 3 points, et par là le problème est résolu. Il reste présumé ici, comme cela ressort aussi de la première lettre, que le coefficient de réfraction du moment d'observation est indépendant de la direction de la visée. Évidemment on ne peut pas en être tout à fait sûr. A ce propos M. Simonsen dit qu'on a eu, à l'État-Major, des doutes sur la théorie d'Andræ, ainsi que cela ressort d'un rapport fait au Ministère de la Guerre au mois de mai 1854.

De plus M. Simonsen mentionne les travaux de triangulation et de nivellement trigonométrique effectués en 1851–52 par le lieutenant-colonel Caroc dans le nord-est de la Séeland. Ils ont été faits d'après la théorie d'Andræ avec élimination de la réfraction, étant donné qu'on employait les formules d'Andræ qui tiennent compte également de la correction de sphéricité pour les distances très grandes. Malheureusement on n'a pas pu retrouver les calculs relatifs à ce nivellement, mais par la correspondance de Caroc au sujet de ces calculs on voit que la triangulation de 1851–52 est basée sur le côté de triangle de Schumacher Julianehöi-Nikolai Kirke et sur un côté de triangle Julianehöi-Staarup, déterminé par la triangulation d'Andræ en 1842 dans le nord-ouest de la Séeland. Même si on n'a plus les calculs, les doutes nommés ci-dessus que l'État-Major a formulés donnent lieu de croire qu'on n'a pas obtenu l'exactitude désirée par le nivellement trigonométrique de Caroc, que cela soit dû au mode de calcul ou à une instabilité de la réfraction. Cette dernière hypothèse est probable, étant donné que pendant les années 1851–59 on entreprit des travaux de nivellement considérables en se basant exclusivement sur un nivellement purement géométrique.

Dans le premier volume de la « Mesure des Degrés Danoise », Andræ relève également certaines difficultés qui se sont présentées au transfert de la triangulation de Vigerlöse à Darserort par suite des conditions de réfraction difficiles. « La plus grande difficulté qui se soit jamais présentée à l'établissement du réseau de triangle actuel est celle de la jonction de Vigerlöse et Darserort. Il est vrai que le côté de triangle qui y correspond n'a qu'une longueur de 6 lieues danoises, ce qui n'est pas une grandeur extraordinaire, mais tandis que pour les côtés voisins Kongsbjerg-Darserort et Kongsbjerg-Hiddensö on pouvait obtenir facilement une vaste vue en se plaçant sur la colline de Kongsbjerg, il n'y avait aucun niveau d'importance ni sur la côte de Falster, ni sur la côte en face de Poméranie. A Falster on put cependant se servir d'un clocher d'église, et l'on y fit donc exactement comme à Snoldelev, en élevant un pilier au-dessus du pignon est de la tour de Vigerlöse et en construisant l'observatoire provisoire autour de ce pilier. Mais dans la contrée de Darserort il n'y avait alors que des bancs de sable, et sur cette base médiocre, exposée à tous vents, les géodésiens prussiens durent construire un signal énorme élevant l'instrument à un niveau de 63 pieds au-dessus de la terre ($81^1/_2$ pieds au-dessus de la Baltique), tandis que le miroir solaire était élevé encore d'une vingtaine de pieds. Et même ces précautions ne pouvaient rendre la jonction certaine, étant donné qu'à Darserort on dut faire confiance à des conditions de réfraction favorables. La première année l'essai fut tout à fait manqué. Alors qu'à Vigerlöse, où le théodolite n'était que de quelques pieds au-dessus du miroir solaire, on pouvait observer Darserort sans peine, il n'était pas possible de cette station, d'après le rapport du général Baeyer, de repérer Vigerlöse une seule fois pendant un mois entier, bien qu'on vît presque tous les jours au soir, en s'élevant de quelques pieds au-dessus de l'instrument, la lumière du miroir solaire surgir au-dessus de la surface de la mer. L'année suivante la réfraction était pourtant si grande que non seulement les observations pouvaient être effectuées sans aucune difficulté, mais qu'on pouvait même voir plusieurs fois toute la côte de Falster surgir à l'horizon vers le soir ».

Mais bien qu'Andræ insiste sur les difficultés extrêmement grandes inhérentes aux triangulations sur mer, il préférait de loin trianguler sur mer à trianguler sur terre, car ses expériences lui disaient que la première opération était beaucoup plus sûre que la dernière. Il en parlera dans le premier volume de la « Mesure des Degrés Danoise », où il écrit: « Avec des lignes de visée allant le long de la surface de la terre, le déplacement variable dû aux conditions atmosphériques changeantes sera décidément plus grand qu'avec des lignes de visées passant par dessus la surface de la mer ».

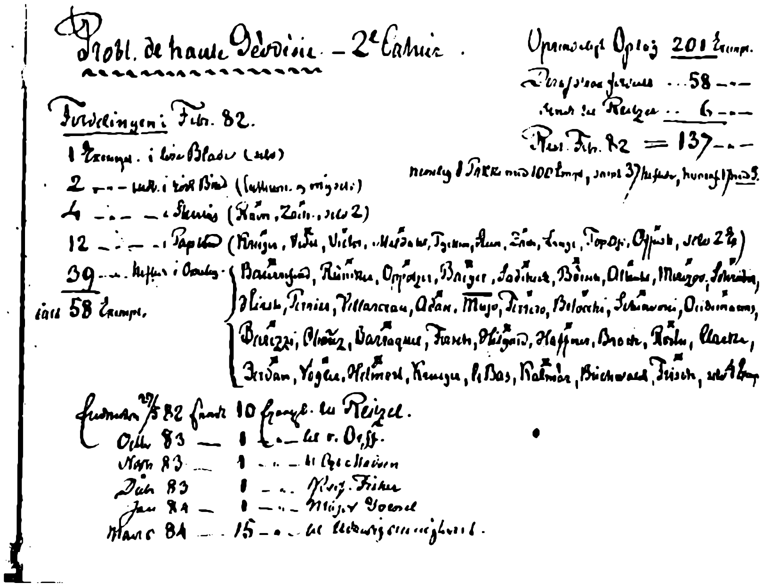
Il ressort des carnets mathématiques et géodésiques d'Andræ qu'au mois d'octobre 1861 il lut un article de Babinet paru dans les Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Tome 53, 1861, page 394: « Sur la réfraction terrestre ». Ce premier article est continué à la page 417 du même tome, et enfin à la page 529. Andræ écrit avec humour: « Babinet s'est occupé à plusieurs reprises dans les derniers fascicules des Comptes Rendus, du problème de la réfraction et surtout de la détermination de la réfraction terrestre. Pour ce magicien, évidemment, toutes les difficultés s'évanouissent, et en deux traits de plume il établit des formules qui s'accordent à merveille avec toutes les expériences possibles. Ça vaut peut-être la peine d'étudier à l'occasion ces articles de plus près pour voir s'ils recèlent éventuellement quelque grain d'or, ce qui n'est pourtant guère probable ».

Ces petits carnets qu'Andræ rédigeait depuis sa première jeunesse et jusqu'à ses dernières années traitent les problèmes mathématiques et géodésiques les plus divers. Parfois ce sont des problèmes tout élémentaires posés en classe à un de ses fils, tantôt des problèmes plus compliqués. Dans un des derniers carnets, qui contient les notations des années 1883–89, il écrit qu'à la séance de l'Académie des Sciences à Paris du 12 juillet 1886 Faye a soutenu ses idées sur la forme de la terre en polémisant contre un ouvrage d'un certain M. Lapparent. Alors que, jusque-là, il a ignoré complètement les travaux des Danois, il a cru pourtant devoir s'y référer maintenant en terminant ainsi: « Permettez-moi de consigner ici, à ce sujet, la déclaration d'un maître de la Science, Mr. Andræ, direct. d. trav. géod. en Danemark; « Il faut se rappeler que la surface du géoïde décrit partout une infinité d'ondulations, qui tantôt s'élèvent comme des monticules au-dessus du sphéroïde (c'est un mot que l'auteur emploie parfois pour désigner plus brièvement l'ellipsoïde de révolution déterminé par le colonel Clarke (sic!)), et tantôt s'abaissent comme des vallées qui ··· qu'entre quelques pouces et quelques pieds ».» A cette citation Andræ ajoute: « Telle est la vérité! »

Même si on comprend parfaitement l'indignation d'Andræ devant le fait qu'en général les travaux danois sont passés complètement sous silence, il faut reconnaître qu'il en est partiellement responsable lui-même. Cela ressort très nettement de ses carnets, qui contiennent une statistique minutieuse de la publication de la « Mesure des Degrés Danoise ». C'est ainsi qu'on sait exactement le tirage de chaque volume et la distribution des exemplaires. Le premier volume de la « Mesure des Degrés Danoise » fut tiré à 201 exemplaires, le deuxième volume à 153, le troisième également à 153, et le quatrième à 150 exemplaires. De plus, le premier volume de l'édition française des travaux théoriques de la « Mesure des Degrés Danoise »: « Problèmes de haute Géodésie », parut en 203 exemplaires, le deuxième volume en 201 et le troisième en 203 exemplaires. Même pour l'époque, ces tirages doivent être considérés comme faibles. Mais ce qui nous étonne davantage, c'est le petit nombre des exemplaires qui ont été distribués. Les carnets d'Andræ montrent nettement combien en ont été envoyés aux libraires pour la vente et combien ont été distribués soit en Danemark, soit à l'étranger. Le carnet a été tenu si soigneusement qu'il est noté si le destinataire en a accusé réception.

En tout, seuls 60 exemplaires environ ont été expédiés en Danemark ou à l'étranger. Il ne faut donc pas s'étonner que la connaissance des travaux d'Andræ ne fût pas ce qu'elle aurait peut-être dû être.

Or, les Danois ont certainement eu tort de montrer tant de réserve, quand on considère que Helmert attribue à Andræ ou éventuellement à Bremicker, la paternité de la courbe d'alignement, alors qu'en réalité c'est Clarke qui en est l'auteur. Cette erreur s'explique sans doute par le fait qu'en Allemagne on avait de la peine à lire non seulement la « Mesure des Degrés Danoise », qui était écrite en danois, mais peut-être aussi la Mesure des Degrés Anglaise, rédigée en anglais. Les listes de distribution d'Andræ sont tenues à jour jusqu'à l'année 1884, où Andræ quitta le poste de directeur (voir la figure ci-contre). Le solde des tirages était alors assez considérable, mais aujourd'hui le livre est pratiquement épuisé. En effet, les directeurs suivants, Zachariae et Madsen, en ont fait des distributions massives, de même qu'un certain nombre d'exemplaires ont été vendus en librairie. Il est donc tout à fait naturel de faire maintenant une nouvelle édition des travaux d'Andræ, en tout cas de la partie théorique la plus importante. Bien qu'on ne puisse pas dire que cette réédition s'impose de toute nécessité, étant donné qu'on trouve des références assez régulières aux travaux d'Andræ par exemple dans le « Handbuch der Vermessungskunde » de Jordan, et dans le Traité de Géodésie de Tardi et Laclavère, et qu'on ne saurait donc prétendre qu'ils sont inconnus, le Danemark a toutefois pour mission — on peut dire tant naturelle que nationale — à l'occasion du centenaire de sa nomination de directeur et du début des travaux géodésiques, de préciser, par cette nouvelle édition de ses écrits les plus marquants, le rôle que ce savant a joué pour la géodésie danoise aussi bien que pour la géodésie internationale.



Probl. de haute Géodésie — 2^{e} Cahier.

Tirage	201	exempl.
d'abord distribués	58	—
expédiés à Reitzel (libraire)	6	—
Solde février 82	137	—

à savoir un paquet de 100 exempl., plus 37 cartonnés, dont 17 avec étiquette.

La distribution en février 82.

1 exempl. en matière (moi)
2 exempl. reliés en reliures rouges (le ministère des cultes et moi)
4 — — — — toile (Ravn, Zach(ariae), moi 2)
12 — — — — en carton (Krieger, Vedel, Victor (Andræ), Meldahl, Tychsen, Steen, Zach(ariae), Lange, Section topographique, l'École Militaire, moi 2 ex.)
39 — cartonnés (Bauernfeind, Rümker, Oppolzer, Baeyer, Sadebeck, Börsch, Albrecht, Morozow(icz), Schreiber, Hirsch, Perrier, Villarceau, Adan, Mayo, Ferrero, Betocchi, Schiavoni, Oudemans, Barozzi, Ibañez, Barraquer, Forsch, Hilgard, Haffner, Broch, Rosén, Clarke, Jordan, Vogler, Helmert, Krueger, le Bas, Kalmár, Buchwald(t), Frisch, moi 4 exempl.)

total 58 exempl.

De plus $^{27}/_{5}$	82	expédié	10	exempl.	à Reitzel
Octobre	83	—	1	—	à v. Orff
Novembre	83	—	1	—	au capitaine Madsen
Décembre	83	—	1	—	au professeur Fis(c)her
Janvier	84	—	1	—	au commandant Goessel
Mars	84	—	15	—	au ministère des affaires étrangères.

Chapitre IX.

Remarques sur les extraits des travaux théoriques d'Andræ.

Nous allons donner quelques détails sur les extraits des travaux d'Andræ qui vont terminer ce mémoire. Il s'agit de quelques-unes des études publiées en français par Andræ lui-même dans le livre intitulé: « Problèmes de haute Géodésie ». Évidemment, il est très difficile de faire un choix, et le fait que quelques-unes des œuvres d'Andræ ne figurent pas ici, ne veut nullement dire qu'elles soient moins importantes, mais plutôt qu'à l'heure actuelle elles ne présentent plus le même intérêt qu'au moment de leur publication. J'ai voulu également montrer par ces extraits la méthode scientifique d'Andræ et son style académique.

Les traités d'Andræ publiés en français ne sont pas tout à fait identiques aux textes danois dont ils sont la traduction et qui parurent dans la « Mesure des Degrés Danoise », Volume I–IV, parce qu'ils ont été revisés par l'auteur et souvent complétés par des détails nouveaux. C'est le cas, d'abord de « l'Introduction des angles mesurés dans le réseau des triangles ». Ce livre traite les corrections à apporter aux angles mesurés dans le réseau géodésique pour permettre de calculer la projection du réseau sur le sphéroïde. Il étudie 3 corrections, dont premièrement la correction de l'angle mesuré par suite de la déviation de la verticale. Cette correction avait été traitée déjà dans l'édition danoise, mais la formule qu'on trouve dans l'édition française, a été présentée pour la première fois dans la note qu'Andræ a envoyée à la conférence de Stuttgart le 29 août 1877. La correction est donnée par l'expression $+ u \sin v \cot z$, où u signifie l'écart entre la verticale de la station et la normale au sphéroïde, où z est la distance zénithale de l'objet pointé et v l'angle formé par les deux plans verticaux dont l'un contient l'objet et l'autre la normale sphéroïdique de la station. La seconde correction est la correction pour la hauteur de l'objet, qui a été mentionnée ci-dessus, et dont la formule est $+\frac{1}{2} e^2 \cos^2 \lambda \sin 2\alpha \frac{h}{N}$, où N est la normale de la station, limitée par l'axe polaire, h la hauteur, λ la latitude et α l'azimut de l'objet, compté du Sud vers l'Ouest tout autour de l'horizon. La troisième correction ne donne pas directement l'angle entre la ligne géodésique et la section normale, mais seulement l'angle entre les deux sections normales, et sa formule est $-\frac{1}{4} e^2 \cos^2 \lambda \sin 2\alpha \frac{\sigma\sigma}{NN}$, où σ est la distance géodésique entre les deux stations. Comme déjà dit, toutes ces corrections ont peu d'importance pour le réseau danois. Andræ indique de manière très détaillée ce qu'il entend par une petite grandeur de premier ordre, soit e^2, le carré de l'excentricité. De même il considère la distance géodésique σ comme une grandeur de premier ordre, d'où on tire la conclusion que σ a un ordre de grandeur d'env. 80 kms, soit une grandeur qui correspond aux côtés de triangle ordinaires.

Le deuxième traité est intitulé: « La ligne géodésique et les sections normales sur une surface quelconque ». Ce travail traite deux problèmes: d'une part la différence entre la longueur de la ligne géodésique et la longueur de la section normale, de l'autre la différence d'azimut entre la ligne géodésique et la section normale mesurée. Ce texte n'est pas identique au traité correspondant du premier volume de la « Mesure des Degrés Danoise », mais c'est le traité qu'on trouve au quatrième volume, qui examine le même problème. C'est là justement le traité auquel je faisais allusion en disant qu'Andræ traite parfois le même problème deux fois, quand il pense avoir trouvé une déduction plus élégante et plus simple. Dans les deux traités il emploie un système orthogonal de coordonnées tangentiel, mais dans le premier traité ce système est orienté de façon à ce qu'un des axes est dirigé vers le nord, un autre vers l'est et le troisième vers l'intérieur de la terre, alors que dans le deuxième le système de coordonnées est orienté de telle manière qu'un des axes est la tangente dans le point d'origine de la ligne géodésique et le deuxième axe formé selon l'équerre. La seconde différence se manifeste dans la définition de la ligne géodésique. Dans le premier cas la courbe géodésique est définie comme la courbe dont le plan d'osculation contient la normale de la surface. Dans le second cas la courbe géodésique est définie comme la distance la plus courte entre deux points donnés sur l'ellipsoïde. Dans un traité intitulé « Practical Formulas for Accurate Calculation by Relative Long Distances of Geographical Coordinates or Distances and Azimuts on the International Ellipsoid of Rotation », Copenhague 1953, l'auteur du présent livre s'est servi du système de coordonnées du deuxième traité d'Andræ, mais de la définition de la ligne géodésique du premier traité. Toutefois dans mon étude l'excentricité e a été employée comme une grandeur de premier ordre, d'où on tire la conclusion qu'une distance géodésique du même ordre correspond à une distance beaucoup plus longue qu'un côté de triangle normal, soit environ 1300 kms, raison pour laquelle les formules doivent être plus exactes, augmentées par des membres des ordres supérieurs. Le troisième des traités d'Andræ est « La ligne géodésique et les sections normales sur le sphéroïde ». Ce traité forme la suite du deuxième traité et détermine la position de la ligne géodésique par rapport aux sections normales. Et ce sont justement ces formules que j'ai rendues plus exactes dans mon ouvrage cité ci-dessus. La conclusion du troisième traité est de beaucoup la plus intéressante, étant donné qu'elle s'occupe de la question de savoir comment la ligne géodésique est placée entre les deux sections normales. Comme l'on sait, cela est très simple quand l'azimut diffère d'un peu plus de 90° ou d'un peu moins de 270°, calculé du Sud, mais pour ces azimuts précisément il se produit des choses très intéressantes. C'est que passant du premier quadrant au second, les deux sections normales changent de places, et en même temps il arrive que la ligne géodésique quitte sa position entre les sections normales, traverse l'une des sections, se met tout à fait en dehors des sections normales, traverse l'autre section, pour finir par se placer entre elles comme dans le cas normal. Andræ explique d'une manière claire et descriptive comment se font ces déplacements.

Andræ détermine la distance σ_1 du point d'origine de la ligne géodésique au point où elle traverse la section normale (à l'exception évidemment de l'extrémité de la ligne, qui se trouve toujours dans la section normale) par l'équation

$$\sigma_1 = 2\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma \pm \sqrt{\left(2\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma\right)\left(2\sigma_0 + \frac{3}{2}\sigma\right)},$$

où $\sigma_0 = N\zeta \cot \lambda$, où ζ est le petit angle par lequel l'azimut de la ligne géodésique dépasse 90° ou est moins de 270°, calculé du Sud. Andræ décrit très élégamment la grandeur σ_0, en montrant qu'elle est tout simplement la distance du point d'origine de la ligne géodésique au point où son azimut est exactement 90° ou 270°, c.-à-d. son point le plus septentrional.

Le traité d'Andræ se termine par l'examen des trois cas possibles: premièrement la position σ_0 entre 0 et $\frac{1}{4}\sigma$ ou entre $\frac{3}{4}\sigma$ et σ, où la ligne géodésique est encore complètement contenue entre les sections normales, deuxièmement la position où σ_0 se trouve entre $\frac{1}{4}\sigma$ et $\frac{3}{8}\sigma$ ou entre $\frac{5}{8}\sigma$ et $\frac{3}{4}\sigma$, où la ligne géodésique n'est contenue qu'en partie entre les sections normales, et troisièmement la position où σ_0 se trouve entre $\frac{3}{8}\sigma$ et $\frac{5}{8}\sigma$, où la ligne géodésique est entièrement en dehors des sections normales, qui pour $\sigma_0 = \frac{1}{2}\sigma$ coïncident complètement, les points extrêmes de la ligne géodésique ayant la même latitude. Par là Andræ a réussi à décrire de la manière à la fois la plus élégante et la plus simple le trajet de la ligne géodésique avec les azimuts est ou ouest respectifs.

Le quatrième traité est intitulé: « Formules pour le calcul des triangles géodésiques ». Il comprend la généralisation du théorème de Legendre sur les triangles sphériques. Cette généralisation ayant déjà été mentionnée, il ne nous reste qu'à souligner qu'Andræ aborde ce problème d'une manière très générale. La formule donnée pour l'excès sphéroïdique dans ce traité est très simple: $\varepsilon = \frac{\sigma^*}{NM}$, où σ^* est l'aire du triangle plan dont les côtés ont les mêmes longueurs que les lignes géodésiques reliant les trois points de triangles sur le sphéroïde. Andræ en tire la conclusion que la ligne géodésique est le meilleur remplacement pour les sections normales doubles. « Comme on le sait, c'est par une heureuse inspiration et non par un mûr examen de la question, que les géodésiens ont été amenés à choisir parmi toutes les formes de triangles précisément celle qui est la plus commode pour les calculs ».

Exceptionnellement Andræ commet une petite erreur de déduction, étant donné qu'évidemment le travail est le même qu'on commence par apporter une correction aux azimuts mesurés, de façon à obtenir à la place les azimuts des lignes géodésiques, ou qu'on fasse le calcul plus tard en utilisant une formule pour l'excès un peu plus compliquée, contenant exactement les mêmes corrections. Il est vrai que, comme déjà dit, ces petites corrections ne jouent aucun rôle pour les triangles géodésiques ordinaires.

Dans le traité suivant: « Détermination des termes du 4^e ordre dans les formules développées » Andræ introduit des membres d'un ordre supérieur dans le théorème généralisé de Legendre. Les formules finales ont une forme très élégante, parce qu'elles montrent que les deux nouveaux membres disparaissent respectivement que le sphéroïde se transforme en une sphère ou que le triangle géodésique soit un triangle spécial équilatère.

Dans l'édition française des traités d'Andræ suivent maintenant deux traités: « Sur l'exactitude du théorème de Legendre » et « Sur les termes des ordres supérieurs dans les formules de A–A*, B–B* et C–C* ». Nous ne reproduisons pas ces traités pour les raisons mentionnées ci-dessus, surtout parce que le dernier a pour but essentiel de faire une comparaison entre les formules d'Andræ et les formules correspondantes données par Hansen et Weingarten. Comme ces formules traitent des triangles géodésiques très étendus et qu'on n'aurait pas l'idée d'appliquer le théorème de Legendre à des triangles si grands, ces articles ne présentent plus guère d'intérêt.

La seconde partie des traités français d'Andræ s'occupe du problème géodésique principal, le transport des coordonnées géographiques sur le sphéroïde. Ce volume se distingue comme tous les travaux d'Andræ par sa clarté et sa précision, mais si nous l'omettons ici, c'est qu'on peut considérer ce travail comme généralement connu, peut-être moins, directement, par la « Mesure des Degrés Danoise », que par la discussion des formules dans le livre de L. Krüger: « Die Formeln von C. G. Andræ, O. Schreiber, Fr. Helmert und O. Börsch für geographische Koordinaten und Untersuchung ihrer Genauigkeit ».

Les résultats obtenus par ces quatre savants ne diffèrent pas beaucoup les uns des autres, et Krüger en fait une comparaison minutieuse, en indiquant à la fin comment il entend tirer de la manière la plus pratique du profit des quatre développements divers de ce problème. Pourtant les différences ne sont pas considérables, et je pense qu'il faut dire que les formules les meilleures sont celles qui s'accompagnent des meilleures tables. A ce propos, Andræ a établi, lui aussi, des tables, qui, toutefois, n'intéressent qu'une petite région de latitude correspondant à celle du Danemark, et qui sont basées sur l'ellipsoïde danois. Si donc les formules d'Andræ devaient avoir une importance aujourd'hui, il faudrait calculer de nouvelles tables, et comme nous avons eu entretemps les excellentes formules et tables d'Ölander, couvrant un intervalle de latitude très étendu, il faut dire que nos besoins sont couverts. La seule objection qu'on puisse faire, c'est que toutes ces formules ne s'appliquent que pour des latitudes au-dessous de 75° env. Si on s'approche du pôle, il faut employer des procédés tout différents, comme l'a fait par exemple l'auteur de cette étude dans son livre cité plus haut sur le calcul des coordonnées géographiques.

La dernière partie des traités français d'Andræ décrit la méthode de déterminer des valeurs améliorées pour les dimensions du sphéroïde de même que l'influence de la déviation de la verticale sur la longitude, la latitude et l'azimut. De ces traités je ne citerai que les remarques préliminaires d'Andræ, qui montrent comment il a conçu les problèmes. En même temps les traités nous donnent une preuve excellente de la clarté du style d'Andræ. Cette partie se termine par un calcul du géoïde du Harz. Cette contribution est très intéressante, étant donné que c'est la première fois qu'on a essayé de déterminer la forme du géoïde. A la base de ce travail il n'y a qu'un nombre limité — mais grand il est vrai — de mesures de latitudes, mais il s'ensuit que la détermination d'Andræ ne peut être considérée que comme provisoire. Le travail d'Andræ est souvent cité, par exemple dans la « Petite histoire de la Géodésie » du général G. Perrier. Il est mentionné également dans le « Handbuch der Vermessungskunde » de Jordan, qui nous donne une figure montrant notre conception actuelle de la situation du géoïde au Harz en tenant compte de toutes les mesures. Bien que cette dernière contribution n'ait qu'une assez faible importance, elle montre pourtant la place qu'Andræ occupe comme précurseur dans tous les domaines de la géodésie. Évidemment la géodésie a fait des progrès depuis les temps d'Andræ et elle continuera à en faire, mais il faut dire pourtant que l'œuvre d'Andræ restera à jamais un très bel exemple de ce qu'un seul homme a pu faire.

La grande activité d'Andræ pour la continuation et l'achèvement des travaux pour la mesure des degrés entrepris par Schumacher fut le résultat naturel de son désir de devenir le directeur de ces travaux, qu'il avait fait tant d'efforts pour pouvoir poursuivre. Ce désir s'explique par la profonde défiance devant la « Wirthschaft » de Schumacher, mot par lequel, dans sa lettre à Læssöe datée du $^{6}/_{9}$ 1841, il désigne l'activité de son prédécesseur. Læssöe, écrivant de Paris le $^{6}/_{10}$ 1842, déclare, dans le même esprit, que « les Schumacheriens devraient être pendus ». Et Andræ écrit encore le $^{19}/_{7}$ 1843, dans une autre lettre à Læssöe: « Ces Messieurs Schumacheriens, qui sont incorrigibles, fouillent encore en Séeland, et c'est un grand problème de savoir s'ils termineront leur travail là-bas pendant l'été. Plus je les regarde s'affairer, plus je suis persuadé que tous leurs efforts ne sont que de la charlatanerie et qu'il n'y a rien d'autre à faire que de nous charger de leur travail ».

On remarque ici l'attitude un peu hautaine du jeune officier Andræ envers la géodésie civile, attitude qui s'explique par l'opposition fondamentale des points de vue tout différents des milieux de l'École Militaire et de l'université. La méthode scientifique basée sur le sens critique et le scepticisme n'est pas le fait d'une école militaire, où il faut s'appuyer davantage sur la foi qui repose sur l'autorité. C'est le grand mérite d'Andræ que, malgré ce handicap scientifique, il a su développer en lui l'esprit du savant qui, doublé qu'il le fut dans son cas de la lucidité et de la capacité créatrice, conduit l'homme aux sommets les plus hauts en lui conférant cette maturité, dont Shakespeare dit qu'elle est tout.

Bibliographie des œuvres d'Andræ.

Den Danske Gradmaaling, Første Bind indeholdende Hovedtrianglerne paa Sjælland og deres Forbindelser med svenske og preussiske Triangelrækker, København 1867 (La Mesure des Degrés Danoise, Premier Volume contenant les triangles principaux en Séeland et leurs jonctions avec des séries de triangles de la Suède et de la Prusse, Copenhague 1867), XX + 579 pages + 4 planches.

Den Danske Gradmaaling, Andet Bind, indeholdende Meridianbuens Hovedtriangler fra Elben til Samsø og deres Forbindelse med Maalingerne paa Sjælland, København 1872 (La Mesure des Degrés Danoise, Deuxième Volume contenant les triangles principaux de l'arc méridien de l'Elbe jusqu'à Samsö et leur jonction avec les mesures de Séeland, Copenhague 1872), XIV + 490 pages + 3 planches.

Den Danske Gradmaaling, Tredie Bind, indeholdende de tilbagestaaende Dele af Triangelnettet og dettes Nedlægning paa Sphæroiden, København 1878 (La Mesure des Degrés Danoise, Troisième Volume contenant les parties restantes du réseau de triangles et sa mise sur le Sphéroïde, Copenhague 1878), XIV + 422 pages + 2 planches.

Den Danske Gradmaaling, Fjerde Bind, indeholdende de astronomiske Iagttagelser og Bestemmelsen af Sphæroiden, København 1884 (La Mesure des Degrés Danoise, Quatrième Volume contenant les observations astronomiques et la détermination du Sphéroïde, Copenhague 1884), XII + 432 pages + 1 planche.

Problèmes de haute géodésie. Extraits de l'ouvrage danois: Den Danske Gradmaaling, 1^er^ Cahier: Formation et calcul des triangles géodésiques, Copenhague 1881, 52 pages.

Problèmes de haute géodésie. Extraits de l'ouvrage danois: Den Danske Gradmaaling, 2^e^ Cahier: Calcul des latitudes, des longitudes et des azimuts sur le sphéroïde, Copenhague 1882, 55 pages.

Problèmes de haute géodésie. Extraits de l'ouvrage danois: Den Danske Gradmaaling, 3^e^ Cahier: Détermination du sphéroïde terrestre par la combinaison des mesures géodésiques avec les observations astronomiques, Copenhague 1883, 56 pages + 1 planche.

Om de projective Forvandlinger, ved hvilke Fladeindholdene bevares uforandrede (Sur les transformations projectives qui conservent les aires constantes). Oversigt over Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider i Aarene 1853, København 1853, pp. 78—94 (Annuaire de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark pour l'année 1853, Copenhague 1853).

Om Beregningen af Brede, Længde og Azimuth paa Sphæroiden (Sur le calcul de la latitude, la longitude et l'azimut sur le sphéroïde). Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider i Aaret 1858, København 1858, pp. 230—269 (Annuaire de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark pour l'année 1858, Copenhague 1858).

Om Rækkeudviklingen af de Formler, som tjene til Bestemmelsen af geodætiske Positioner paa den sphæroidiske Jordoverflade (Sur le développement en série des formules qui servent à déterminer les positions géodésiques sur la surface sphéroïdale de la terre). Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider i Aaret 1859, København 1859, pp. 27—70 (Annuaire de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark pour l'année 1859, Copenhague 1859).

Udvidelse af en af Laplace i Mécanique céleste angivet Methode for Bestemmelsen af en ubekjendt Størrelse ved givne umiddelbare Iagttagelser (Extension d'une méthode exposée par Laplace dans sa «Mécanique céleste» pour la détermination d'une grandeur inconnue par des observations immédiates). Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider i Aaret 1860, København 1860, pp. 198—235 (Annuaire de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark pour l'année 1860, Copenhague 1860).

Om den approximative Beregning af bestemte Integraler (Sur le calcul approximatif des intégrales déterminées). Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider i

Aaret 1867, København 1867, pp. 165—201 (Annuaire de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark pour l'année 1867, Copenhague 1867).

Fehlerbestimmung bei der Auflösung der POTHENOT'schen Aufgabe mit dem Messtische (Détermination de l'erreur par la solution du problème de POTHENOT avec la planchette). Astronomische Nachrichten N° 1117, pp. 193—202.

Formeln zur Berechnung der geodätischen Breiten, Längen und Azimuthe auf dem Erdsphäroid (Formules pour le calcul des latitudes, des longitudes et des azimuts géodésiques sur le sphéroïde de la terre). Astronomische Nachrichten N° 1187, pp. 161—168.

Fernere Entwickelung der in N° 1187 der Astronomischen Nachrichten behandelten geodätischen Formeln (Développement supplémentaire des formules géodésiques exposées dans le N° 1187 des Astronomischen Nachrichten). Astronomische Nachrichten N° 1272, pp. 369—380.

Schreiben des Herrn Geheimen Etatsraths von Andræ an den Herausgeber. Om Bestemmelsen af den sandsynlige Fejl ved Hjælp af Iagttagelsernes Differentser (Lettre du conseiller intime d'Etat Andræ au rédacteur des Astronomischen Nachrichten. Sur la détermination de l'erreur probable par les différences des observations). Astronomische Nachrichten N° 1770, pp. 283—284.

Ueber die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch die gegebenen Differenzen von *m* gleich genauen Beobachtungen einer Unbekannten (Sur la détermination de l'erreur probable par les différences données de *m* observations de même précision d'une inconnue). Astronomische Nachrichten N° 1889, pp. 257—272.

En Anmeldelse om en Geometribog af Kaptajn Kellner: Den beskrivende (descriptive) Geometries theoretiske Deel (Compte rendu de la partie théorique de la géométrie descriptive du capitaine Kellner). Maanedsskrift for Litteratur, XVII, København 1837, pp. 401—421 (Revue mensuelle de littérature, XVII, Copenhague 1837, pp. 401—421).

Bemærkninger ved Høidelisterne over det værnepligtige Mandskab i 1ste sjællandske District (Remarques sur les tableaux des mesures de la taille des conscrits dans le 1er district de Séeland). Det kongelige medicinske Selskabs Skrifter. Ny Række. Første Bind. København 1848, pp. 256—261 (Publications de la Société Royale de Médecine. Nouvelle série, 1er volume. Copenhague 1848, pp. 256—261).

Anvendelse af Principet for de mindste Qvadraters Methode paa Bestemmelsen af Skudsikkerheden ved Skydning mod verticale Skiver (L'application du principe de la méthode des moindres carrés à la détermination de la précision du tir en tirant sur des cibles verticales). Tidsskrift for Krigsvæsen. København 1856, pp. 46—61 (Revue des sciences militaires. Copenhague 1856, pp. 46—61).

Biographies.

ANDRÆ, POUL: En Brevvexling mellem Andræ og Krieger under Londonerkonferencen 1864 (Correspondance d'Andræ et de Krieger pendant la conférence de Londres 1864). Særtryk af Historisk Tidsskrift, 6 R. V. København 1894 (Revue historique, tirage à part, 6 sér. V. Copenhague 1894), 64 pages.

— Geheimekonferentsraad Carl Georg Andræ. En biografisk Fremstilling med Bidrag til Belysning af hans Samtidige (Carl Georg Andræ, conseiller intime des conférences. Biographie et contribution à l'étude de ses contemporains).
1. Bind, København 1897 (Volume 1, Copenhague 1897), 319 pages.
2. Bind, København 1909 (Volume 2, Copenhague 1909), 196 pages.
3. Bind, København 1911 (Volume 3, Copenhague 1911), 263 pages.
Supplement og Person-Register, København 1912 (Supplément et index des noms de personnes, Copenhague 1912), 207 pages.

— Andræ-Hall overfor den politiske Situation i Efteraaret 1863, en dokumenteret Fremstilling, København 1902 (Andræ-Hall devant la situation politique à l'automne 1863, compte rendu documenté, Copenhague 1902), 170 pages.

— Andræ-Hall overfor den politiske Situation i Efteraaret 1863, et Svar til Hr. Folketingsmand N. Neergaard m. Fl., København 1902 (Andræ-Hall devant la situation politique à l'automne 1863, réponse à M. N. Neergaard, député, et à d'autres, Copenhague 1902), 27 pages.

— Andræ og Fællesforfatningen af 2. Oktober 1855, København 1903 (Andræ et la constitution commune du 2 octobre 1855, Copenhague 1903), 520 pages.

— Andræ og hans Opfindelse Forholdstals Valgmaaden. Et Mindeskrift, København 1905 (Andræ et son invention du régime de la représentation proportionnelle. Mémorial, Copenhague 1905), 186 pages.

— Fortsættelse af Mindeskriftet, København 1907 (Suite du Mémorial, Copenhague 1907), 124 pages.

— Geheimeraadinde Andræ's politiske Dagbøger (Les journaux politiques de Madame Andræ)
I, København 1914 (I, Copenhague 1914), 266 pages.
II, København 1916 (II, Copenhague 1916), 269 pages.
III, København 1920 (III, Copenhague 1920), 301 pages.

— Andræs Torsdage i Samvær med Hall og Krieger, København 1920 (Les jeudis d'Andræ en compagnie de Hall et de Krieger, Copenhague 1920), 85 pages.

DAHL, FLEMMING: Andræ og Østgrønland (Andræ et le Grœnland oriental). Særtryk af «Dagens Nyheder» $^{14}/_{10}$ 1932 (Tirage à part des «Dagens Nyheder» du $^{14}/_{10}$ 1932), 16 pages.

— C. G. Andræ. En Karakteristik (C. G. Andræ. Un portrait). Særtryk af C. G. Andræ's Taler I, København 1933 (Tirage à part des Discours de C. G. Andræ, vol. I, Copenhague 1933), 110 pages.

— C. G. Andræ's Taler. I Udvalg (Les discours de C. G. Andræ. Discours choisis).
I, København 1933 (I, Copenhague 1933), 372 pages.
II, København 1934 (II, Copenhague 1934), 480 pages.

— Det Andræ-Heiberg'ske Venskab (L'amitié d'Andræ et de Heiberg). Særtryk af Historiske Meddelelser om København. Tredje Række I, København 1935 (Tirage à part des Nouvelles historiques sur Copenhague. Troisième série I, Copenhague 1935), 53 pages.

Dansk Biografisk Leksikon, Bind I, København 1887 (Dictionnaire de biographie danoise, t. I, Copenhague 1887). Notices de C. St. A. Bille (pp. 258–263) et G. Zachariae (pp. 263–264).

— Bind I, København 1933 (Dictionnaire de biographie danoise, t. I, Copenhague 1933). Notices de N. Neergaard (pp. 425–434) et G. Zachariae (revue par A. Schneider) (pp. 434–436).

Index des noms.

Extraits de Problèmes de haute Géodésie 1er Cahier: Formation et calcul des triangles géodésiques.

§ 1. Introduction des angles mesurés dans le réseau des triangles.

Par les observations faites aux différentes stations, on détermine les différences de direction ou les angles compris entre les plans verticaux qui, de la station dont il s'agit, sont menés par les objets pointés. Mais ce ne sont pas ces angles qui peuvent entrer directement dans le réseau des triangles géodésiques, car ce réseau est formé par la liaison mutuelle, non des stations et des objets eux-mêmes, mais de leurs projections sur la surface sphéroïdique de la terre, qui, on le sait, est un ellipsoïde de révolution coïncidant de si près avec la surface de niveau à la hauteur moyenne de la mer, que la distance entre ces deux surfaces, pour de grandes parties de l'ellipsoïde, ne s'élève souvent qu'à quelques pouces et, en général, dépasse à peine quelques pieds. La projection d'un point quelconque étant déterminée par l'intersection de la surface avec la normale sphéroïdique qui contient ce point, il est évident que les angles mesurés doivent subir une réduction, pour pouvoir être considérés comme formés entre les plans qui renferment la normale sphéroïdique de la station et les projections des objets pointés. Il est clair aussi que cette réduction doit avoir une double origine, puisqu'elle provient en partie de l'écart u entre la verticale de la station et la normale au sphéroïde, en partie de la circonstance qu'on a pointé les objets eux-mêmes au lieu de leurs projections. Le triangle sphérique qui est déterminé par la ligne de visée, la verticale et la normale au sphéroïde, montre immédiatement que l'écart u ci-dessus mentionné doit, pour chaque direction prise de la station, entraîner une correction exprimée par

$$+ u \sin v \cot z, \tag{1}$$

où z est la distance zénithale de l'objet pointé et v, l'angle formé par les deux plans verticaux dont l'un contient l'objet et l'autre la normale sphéroïdique de la station. Comme u est un très petit angle qui n'atteint guère qu'exceptionnellement une grandeur de 6 à 7 secondes d'arc, et que z, si les mesures ne sont pas entreprises dans un pays de montagnes, ne s'écarte que peu de 90°, cette correction inconnue se réduira dans les circonstances ordinaires à une si petite fraction de seconde, qu'elle peut être considérée comme disparaissant vis-à-vis des inévitables erreurs d'observation. Lorsque la hauteur h de l'objet pointé est regardée comme une grandeur du 2e ordre, la seconde correction qui s'y rapporte est une grandeur du 3e ordre pour la direction dont il s'agit, et on ne pourra ainsi lui refuser toute signification, surtout dans un pays de montagnes. En effet, comme ici et dans tout ce qui suit, nous rapportons les grandeurs géodésiques à différents ordres, en prenant pour unité de comparaison le demi grand axe, a, ou le demi petit axe, b, de la terre, ou une autre ligne de cette classe, et considérons un côté quelconque de triangle, σ, déterminé directement, comme une petite grandeur du 1er ordre, ordre auquel devra aussi être rapporté le carré e^2 de l'excentricité, on pourra poser comme règle générale pour la géodésie pratique, que toute grandeur du 5e ordre ou d'un ordre plus élevé doit être regardée comme tout à fait négligeable dans la détermination d'un côté de triangle ou d'une grandeur de la même classe, et, par conséquent aussi, que toute grandeur du 4e ordre peut être rejetée dans la détermination des angles des triangles et des azimuts. Mais il n'est naturellement pas dit pour cela qu'il faille toujours avoir égard à des grandeurs du 4e ordre dans la détermination des côtés d'un triangle et à des grandeurs du 3e dans celle de ses angles, car il est évident qu'une indication de l'ordre ne détermine qu'incomplètement la grandeur dont il s'agit, et si le n^e ordre peut être supposé compris entre les limites $\left(\frac{1}{100}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{200}\right)^n$, ce n'est cependant qu'une valeur moyenne approchée dont les écarts, dans quelques cas, peuvent être assez considérables. Ainsi, pour la correction mentionnée plus haut, on a l'expression:

$$+\frac{1}{2}e^2\cos^2\lambda\sin 2\alpha\cdot\frac{h}{N}, \tag{2}$$

où N est la normale de la station, limitée par l'axe polaire, λ sa latitude et α l'azimut de l'objet, compté du Sud vers l'Ouest tout autour de l'horizon. Comme, pour le Danemark, le facteur $\frac{1}{2}e^2\cos^2\lambda\cdot\frac{h}{N}$, même dans les cas les plus défavorables, n'atteint guère qu'une valeur de $\frac{1}{180}$ de seconde d'arc, on voit que cette correction devient aussi complètement insensible. Nous regarderons donc, dans ce qui suit, tous les angles déterminés par des différences de direction, comme mesurés entre des sections normales menées par des stations sur la surface sphéroïdique de la terre, et passant par des objets qui eux-mêmes sont situés sur cette surface.

Mais ce ne sont pas non plus les angles ainsi déterminés qui entrent directement dans les triangles géodésiques. En effet, les normales aux deux points A et B du sphéroïde ne pouvant en général être contenues dans le même plan, la section $AA'B$, suivant laquelle la surface est coupée par le plan normal en A, qui renferme B, sera différente de la section $BB'A$, qui résulte de l'intersection de la surface par le plan normal en B, qui renferme A. La liaison qui est établie entre les deux sommets A et B par les sections normales elles-mêmes donnera donc en général aux triangles des côtés doubles, et c'est seulement lorsque ces deux sommets sont sur le même méridien ou le même parallèle que le côté correspondant se réduit à une simple ligne. Ce doublement, il est vrai, n'a pas une grande importance pratique, l'angle $A'AB'$, qui peut être considéré comme égal à l'angle $A'BB'$, étant une petite grandeur du 3^e ordre qui, comptée positivement lorsque $BB'A$ est à droite de $AA'B$, a pour expression:

$$-\frac{1}{4}e^2\cos^2\lambda\sin 2\alpha\cdot\frac{\sigma\sigma}{NN}, \tag{3}$$

d'où il suit que les deux sections s'éloignent si peu l'une de l'autre, que la distance qui les sépare, même vers le milieu, où elle est la plus grande, et même lorsque le côté a une étendue de 200,000 pieds, ne peut jamais, en Danemark, dépasser le tiers d'une ligne décimale; mais, au point de vue de la théorie, il n'en est pas moins nécessaire de représenter les côtés par des courbes simples, nettement définies, qui, dans la détermination du triangle, puissent écarter toute équivoque. Il semble évident que, par le choix de la ligne de jonction entre A et B, on doit déterminer la courbe d'une manière telle que, là où l'expression (3) n'est pas nulle, elle soit renfermée entre $AA'B$ et $BB'A$, ce qui permet aussi, avec une exactitude plus que suffisante, de la considérer, quant à sa longueur, comme coïncidant avec chacune de ces sections. Mais même en ajoutant la condition que la courbe doit être définie par une propriété qui, appliquée au plan et à la surface sphérique, la réduise respectivement à une ligne droite et à un arc de grand cercle, le problème est cependant encore indéterminé et pourra être résolu de différentes manières. On aurait, par exemple, une solution très naturelle en faisant passer la courbe par tous les points d'où A et B se montrent dans des directions opposées, ou, en d'autres termes, en prenant l'ensemble des points dont les plans normaux menés par A passent toujours en même temps par B, et cette courbe, qui jouit de la remarquable propriété d'être dans tous ses points la plus rapprochée de la corde AB, présenterait en outre un avantage assez important, puisqu'il est facile de s'assurer qu'elle est tangente en A à la section $AA'B$ et en B à la section $BB'A$. Par conséquent, elle déterminerait le triangle d'une façon telle que ses angles coïncideraient exactement avec ceux des plans normaux. Néanmoins, ce n'est pas, comme on sait, une courbe de cette nature qui a été choisie par les géodésiens; ils ont préféré le plus court chemin sur la surface, la ligne dite géodésique entre A et B, bien que cette ligne entraîne une correction, à la vérité sans importance, pour les angles mesurés, parce que, en A et en B, elle divise en trois les angles $A'AB'$ et $A'BB'$, de telle manière qu'elle est en A la plus rapprochée de $AA'B$ et en B la plus voisine de $BB'A$. Par contre, relativement à sa longueur, on pourra la considérer, même dans les calculs les plus rigoureux, comme coïncidant complètement avec les sections normales, la différence étant si petite qu'elle descend au-dessous de $\frac{1}{100\,000}$ de ligne décimale, pour des distances comme de Copenhague à Skagen ou à Altona. Que cette différence, en tout cas, soit une très petite grandeur du 7^e ordre, c'est ce qu'on peut démontrer par un raisonnement bien simple sans recourir au calcul. En effet, si l'on s'imagine la section elliptique $BB'A$ et la ligne géodésique entre A et B projetées sur le plan normal $AA'B$, il est évident que la projection de $BB'A$ sera une nouvelle ellipse tangente en A à l'ellipse $AA'B$, et que la projection de la ligne géodésique devra être renfermée entre ces deux ellipses. Mais la ligne géodésique, qui est plus petite que l'ellipse $BB'A$, est évidemment plus grande que sa propre projection, qui est elle-même plus grande que la projection de $BB'A$, et, par conséquent, la différence entre la ligne et $BB'A$ est plus petite que la différence entre cette dernière ellipse et sa projection. Or, comme aucun des éléments de $BB'A$ ne peut faire avec le plan de projection un angle plus grand que l'angle $A'AB'$ lui-même, cette dernière différence est évidemment plus petite que le produit de $BB'A$ par le facteur $(1 - \cos A'AB')$, qui est une très petite grandeur du 6^e ordre, d'où il suit qu'elle est elle-même une très petite grandeur du 7^e ordre; et le même raisonnement étant applicable à la ligne et à l'ellipse $AA'B$, puisqu'on peut également les projeter toutes deux sur le plan normal $BB'A$, mon assertion se trouve ainsi complètement justifiée. Relativement à la déviation de la section normale, ou l'angle qu'elle fait en A avec la ligne géodésique AB, nous renverrons au paragraphe suivant, où la relation entre la ligne AB et les sections normales $AA'B$ et $BB'A$ sera l'objet d'une recherche détaillée.

§ 2. La ligne géodésique et les sections normales sur une surface quelconque.

Dans l'examen de cette question, nous ferons provisoirement abstraction du sphéroïde, et aborderons le problème d'une manière tout à fait générale en déterminant d'abord la ligne géodésique qui, d'un point donné quelconque A, est menée dans une direction donnée sur une surface donnée quelconque.

Prenons un système de coordonnées rectangulaires dans lequel le plan des xy soit le plan tangent de la surface à l'origine A de la courbe, d'où il suit que la normale en ce point sera en même temps l'axe des z, qui doit être compté positivement au-dessus de l'origine. Si maintenant nous considérons provisoirement une courbe quelconque partant de A dans une direction donnée et située sur la surface, et que nous fassions coïncider l'axe des x avec cette direction, les projections de la courbe sur les plans des xy et des xz seront évidemment représentées par les séries:

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0'' \cdot \frac{x^2}{2} + y_0''' \cdot \frac{x^3}{6} + y_0^{IV} \cdot \frac{x^4}{24} + y_0^{V} \cdot \frac{x^5}{120} + \cdots \\ z &= z_0'' \cdot \frac{x^2}{2} + z_0''' \cdot \frac{x^3}{6} + z_0^{IV} \cdot \frac{x^4}{24} + z_0^{V} \cdot \frac{x^5}{120} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

où les accents désignent les coefficients différentiels et le zéro placé au pied de ces coefficients indique que leur valeur correspond à l'origine.

Une section normale quelconque partant de A sera de même représentée par les équations:

$$\left.\begin{aligned} Y &= cx \\ Z &= Z_0'' \cdot \frac{x^2}{2} + Z_0''' \cdot \frac{x^3}{6} + Z_0^{IV} \cdot \frac{x^4}{24} + Z_0^{V} \cdot \frac{x^5}{120} + \cdots \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Si cette section normale doit passer par un point B de la courbe (4) ayant x_1 pour abscisse, les ordonnées y et Y correspondant à cette abscisse devront coïncider, et la constante c sera déterminée par l'équation:

$$c = y_0'' \cdot \frac{x_1}{2} + y_0''' \cdot \frac{x_1^2}{6} + y_0^{IV} \cdot \frac{x_1^3}{24} + y_0^{V} \cdot \frac{x_1^4}{120} + \cdots. \tag{6}$$

Les arcs σ et s, compris entre les points A et B et appartenant respectivement à la courbe (4) et à la section normale (5), ont pour expression les intégrales:

$$\sigma = \int_0^{x_1} dx \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \int_0^{x_1} dx \sqrt{1+u} = \int_0^{x_1} dx \left\{ 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + \cdots \right\}$$

$$S = \int_0^{x_1} dx \sqrt{1 + c^2 + Z'^2} = \int_0^{x_1} dx \sqrt{1+U} = \int_0^{x_1} dx \left\{ 1 + \frac{1}{2}U - \frac{1}{8}U^2 + \frac{1}{16}U^3 + \cdots \right\}$$

dans lesquelles on a, pour abréger, posé:

$$u = y'^2 + z'^2 = \left(y_0'' \cdot x + y_0''' \cdot \frac{x^2}{2} + y_0^{IV} \cdot \frac{x^3}{6} + \cdots \right)^2 + \left(z_0'' \cdot x + z_0''' \cdot \frac{x^2}{2} + z_0^{IV} \cdot \frac{x^3}{6} + \cdots \right)^2$$

$$U = c^2 + Z'^2 = \left(y_0'' \cdot \frac{x_1}{2} + y_0''' \cdot \frac{x_1^2}{6} + y_0^{IV} \cdot \frac{x_1^3}{24} + \cdots \right)^2 + \left(Z_0'' \cdot x + Z_0''' \cdot \frac{x^2}{2} + Z_0^{IV} \cdot \frac{x^3}{6} + \cdots \right)^2.$$

La différence $\varDelta = S - \sigma$ sera donc exprimée par l'intégrale:

$$\varDelta = \frac{1}{2} \int_0^{x_1} dx \left\{ (U - u) - \frac{1}{4}(U^2 - u^2) + \frac{1}{8}(U^3 - u^3) + \cdots \right\}. \tag{7}$$

Si l'on effectue l'intégration, ce qui n'offre pas la moindre difficulté, tous les termes dans la valeur de $\varDelta$ seront des puissances de x_1, dont les coefficients contiennent les valeurs constantes des coefficients différentiels de y, z et Z correspondant à l'origine A. Les courbes (4) et (5) étant complètement déterminées par leurs projections sur le plan des xy conjointement avec l'équation de la surface donnée, non seulement y et Y mais aussi z et Z doivent être considérés comme des fonctions de la variable indépendante x. Les équations différentielles de la surface donnée peuvent donc toujours servir à éliminer les coefficients différentiels z_0'', z_0''', $z_0^{IV} \cdots$ et Z_0'', Z_0''', $Z_0^{IV} \cdots$ à l'aide des coefficients différentiels de y, et, cette élimination une fois terminée, la différence $\varDelta$ sera représentée par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x_1, et dont tous les coefficients ne contiendront plus que y_0'', y_0''', $y_0^{IV} \cdots$. On voit facilement que le coefficient du terme de l'ordre le moins élevé contiendra seulement y_0'', le second y_0'' et y_0''', le troisième y_0'', y_0''' et y_0^{IV} et ainsi de suite, les coefficients des termes de chaque ordre successif contenant des coefficients différentiels d'un ordre toujours plus élevé. Mais la ligne géodésique elle-même sera ainsi déterminée de la manière la plus simple et la plus directe, puisqu'on peut trouver successivement les valeurs de tous ses coefficients différentiels y_0'', y_0''', $y_0^{IV} \cdots$. Il est en effet évident que, si la courbe (4) doit être la ligne la plus courte entre les points A et B, les coefficients différentiels devront recevoir des valeurs qui rendent la différence $\varDelta$ un maximum absolu, et, comme on peut toujours s'imaginer B assez rapproché de A pour que tous les termes d'un ordre plus élevé s'évanouissent devant ceux d'un ordre inférieur, il en résulte en outre que chaque terme pris isolément devra recevoir la plus grande valeur possible. La valeur maximum du premier terme déterminera donc y_0'', et les termes suivants détermineront successivement de la même manière y_0''', $y_0^{IV} \cdots$; mais il ne s'ensuit pas que chaque nouveau terme doive nécessairement déterminer un nouveau coefficient différentiel de l'ordre suivant, les coefficients de quelques termes pouvant très bien être réduits à des valeurs constantes par les coefficients différentiels déjà trouvés. Néanmoins, dans tous les cas, en continuant le développement des termes de la série, on pourra toujours déterminer successivement des coefficients d'un ordre de plus en plus élevé, et, par conséquent, en même temps, la ligne géodésique avec toute l'exactitude qu'on voudra. Et alors les formules (7) et (6) donneront aussi, avec une exactitude correspondante, tant la différence Δ que l'angle δ entre la section normale et la ligne, puisqu'on a évidemment tang $\delta = c$.

Pour conserver à la solution du problème sa généralité, il faut effectuer l'élimination indiquée plus haut sans connaître l'équation spéciale de la surface donnée, et cela pourra se faire en introduisant les valeurs constantes, correspondant à l'origine A, des coefficients différentiels partiels de la surface. Si l'on suppose l'équation de cette surface résolue par rapport à z, on pourra, comme on sait, écrire son équation différentielle du 1er ordre sous la forme:

$$z' = p + q \cdot y' \tag{8}$$

dont la différentiation donne:

$$z'' = r + 2s \cdot y' + t \cdot y'^2 + q \cdot y'' \tag{9}$$

où nous employons les notations habituelles pour les coefficients différentiels partiels du 1er et du 2e ordre. Si l'on pousse plus loin la différentiation en se rappelant toujours que z et y sont des fonctions de x et tous les coefficients différentiels partiels des fonctions de x et de y, on trouvera successivement des expressions générales analogues pour z''', z^{IV}, $z^{V} \cdots$, et si alors, outre $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, on substitue dans ces expressions les valeurs correspondant à l'origine A, respectivement pour la courbe (4), où $y'_0 = 0$, et pour la courbe (5), où $Y'_0 = c$, et $Y''_0 = Y'''_0 = Y^{IV}_0 \cdots = 0$, on obtiendra les valeurs cherchées de z''_0, z'''_0, $z^{IV}_0 \cdots$ et de Z''_0, Z'''_0, $Z^{IV}_0 \cdots$. L'équation (9) donne ainsi:

$$z''_0 = r_0\,; \quad Z''_0 = r_0 + 2s_0 \cdot c + t_0 \cdot c^2. \tag{10}$$

Commençons le développement de la formule (7), et bornons-nous à déterminer le terme de l'ordre le moins élevé par rapport à x_1, en posant:

$$U - u = + y''_0 y''_0 \left(\frac{x_1^2}{4} - x^2\right) + (Z''_0 Z''_0 - z''_0 z''_0)\, x^2$$

et en laissant de côté tous les termes suivants de la série. L'intégration donnera alors:

$$\Delta = - y''_0 y''_0 \frac{x_1^3}{24} + (Z''_0 Z''_0 - z''_0 z''_0) \frac{x_1^3}{6}\,;$$

mais, suivant (10), le coefficient $(Z''_0 Z''_0 - z''_0 z''_0)$ contiendra le facteur c, dont le terme le moins élevé est du 1er ordre. Jusqu'au 3e ordre inclusivement on aura donc toujours:

$$\Delta = - y''_0 y''_0 \frac{x_1^3}{24}.$$

Comme x_1 est positif, le maximum de ce terme exigera qu'on ait $y''_0 = 0$. Pour une courbe quelconque ne remplissant pas cette condition, la différence Δ, quand B se rapprochera de A, finira par devenir négative, et la courbe deviendra ainsi plus longue que la section normale correspondante.

L'introduction de la valeur $y''_0 = 0$ apporte une importante simplification dans les expressions de c, de u et de U. En continuant le développement de la différentielle jusqu'au 4e ordre inclusivement, on aura ainsi:

$$U - u = y'''_0 y'''_0 \left(\frac{x_1^4}{36} - \frac{x^4}{4}\right) + (Z''_0 Z''_0 - z''_0 z''_0)\, x^2 + (Z''_0 Z'''_0 - z''_0 z'''_0)\, x^3 + (Z''_0 Z^{IV}_0 - z''_0 z^{IV}_0) \frac{x^4}{3}$$
$$+ (Z'''_0 Z'''_0 - z'''_0 z'''_0) \frac{x^4}{4}\,;$$

$$U^2 - u^2 = (Z''^4_0 - z''^4_0)\, x^4\,;$$

et par suite:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta = -y_0''' y_0''' \frac{x_1^5}{90} + (Z_0'' Z_0'' - z_0'' z_0'') \frac{x_1^3}{6} + (Z_0'' Z_0''' - z_0'' z_0''') \frac{x_1^4}{8} + (Z_0'' Z_0^{IV} - z_0'' z_0^{IV}) \frac{x_1^5}{30} \\ + (Z_0''' Z_0''' - z_0''' z_0''') \frac{x_1^5}{40} - (Z_0''^4 - z_0''^4) \frac{x_1^5}{40}\end{aligned}\right\}. \qquad (11)$$

Dans les expressions générales de z''' et de z^{IV} figurent les coefficients différentiels partiels du 3^e et du 4^e ordre de la surface. C'est pourquoi nous adopterons un système de notations qui permette de désigner avec facilité les coefficients différentiels d'un ordre quelconque, en écrivant respectivement r', s', t', u' au lieu de $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$, et, de la même manière, en suivant toujours un ordre analogue, r'', s'', t'', u'', v'' et r''', s''', t''', u''', v''', w''' etc. pour les coefficients du 4^e, du 5^e etc. ordre. La différentiation de (9) donne ainsi pour z''' et z^{IV}, en négligeant dans la dernière expression les termes qui évidemment s'évanouissent par la substitution des valeurs pour l'origine A des courbes (4) et (5):

$$z''' = r' + 3s'y' + 3t'y'^2 + u'y'^3 + 3sy'' + 3ty'y'' + qy''' ;$$
$$z^{IV} = r'' + 4s''y' + 6t''y'^2 + 4u''y'^3 + v''y'^4 + 4sy''' + \cdots$$

d'où l'on tire:

$$z_0''' = r_0' ; \qquad\qquad Z_0''' = r_0' + 3s_0' c + 3\, t_0' c^2 + u_0' c^3 .$$
$$z_0^{IV} = r_0'' + 4s_0 y_0''' ; \qquad Z_0^{IV} = r_0'' + 4s_0'' c + 6t_0'' c^2 + 4u_0'' c^3 + v_0'' c^4 .$$

En se rappelant que l'équation (11) ne doit être développée que jusqu'au 5^e ordre inclusivement, et que c est maintenant une grandeur du 2^e ordre, on voit que les 3^e, 5^e et 6^e termes du second membre de la formule peuvent être complètement négligés, et que, pour ce qui regarde les 2^e et 4^e termes, on a, avec toute l'exactitude nécessaire:

$$(Z_0'' Z_0'' - z_0'' z_0'') = 4 r_0 s_0 c = \frac{2}{3} r_0 s_0 y_0''' x_1^2 ;$$
$$(Z_0'' Z_0^{IV} - z_0'' z_0^{IV}) = -4 r_0 s_0 y_0''' ;$$

valeurs qui, substituées dans (11), donnent:

$$\varDelta = \left(-\frac{1}{90} y_0''' y_0''' + \frac{1}{9} r_0 s_0 y_0''' - \frac{2}{15} r_0 s_0 y_0'''\right) x_1^5 = -(y_0''' y_0''' + 2 r_0 s_0 y_0''') \frac{x_1^5}{90} ;$$

dont le maximum, puisque x_1 est toujours positif, correspond évidemment à $y_0''' = -r_0 s_0$, d'où il suit nécessairement que la différence entre la section normale et la ligne géodésique commencera pour toutes les surfaces avec le terme du 5^e ordre:

$$\varDelta = \frac{1}{90} r_0^2 s_0^2 x^5 \qquad (12)$$

formule dans laquelle on a supprimé la marque mise au pied de l'abscisse du point B, x devant, après l'intégration, être regardé comme une grandeur arbitraire. Comme on a en outre:

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \int_0^x dx \sqrt{1+u} = \int_0^x dx \left(1 + \frac{1}{2} u \cdots\right) = \int_0^x dx \left(1 + \frac{1}{2} z_0''^2 x^2 + \cdots\right) \\ &= x + \frac{1}{6} r_0^2 x^3 + \cdots\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

on voit aussi qu'on peut, en conservant la même exactitude, remplacer dans (12) x^5 par σ^5. Pour mettre en évidence la signification géométrique de la formule, il sera bon d'ailleurs de faire tourner les axes des coordonnées autour du point A, dans le plan des xy, de manière que les nouveaux axes rectangulaires, que nous appellerons l'axe des ξ et l'axe des η, coïncident avec les directions des sections normales principales de la surface. En désignant par R_0 et T_0 les nouveaux coefficients différentiels partiels du 2^e ordre par rapport à ξ et à η, la coordonnée z pourra être représentée de deux manières par un développement en série, qui, en négligeant les termes du 3^e ordre et d'un ordre plus élevé, donnera:

$$z = \frac{1}{2}(R_0\xi\xi + T_0\eta\eta) + \cdots = \frac{1}{2}(r_0 xx + 2 s_0 xy + t_0 yy) + \cdots.$$

Mais si, ayant spécialement égard à l'application de la formule au sphéroïde, où nous avons pris le méridien pour axe des abscisses et considéré la direction vers le Nord comme positive, en comptant en même temps l'azimut du Sud par l'Ouest tout autour de l'horizon, on désigne par α l'angle formé de gauche à droite entre l'axe des ξ négatifs et celui des x positifs, il est clair qu'on aura:

$$\xi = -\cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y\,; \quad \eta = \sin\alpha\cdot x - \cos\alpha\cdot y.$$

Si l'on substitue ces valeurs de ξ et de η, les coefficients des mêmes puissances de x et de y devant être égaux, il en résultera les équations:

$$r_0 = R_0\cos^2\alpha + T_0\sin^2\alpha\,; \quad s_0 = (R_0 - T_0)\sin\alpha\cos\alpha\,; \quad t_0 = R_0\sin^2\alpha + T_0\cos^2\alpha,$$

et si ϱ, ϱ_1 et ϱ_2 désignent les rayons de courbure, au point A, respectivement de la ligne géodésique et des sections normales principales menées par les axes des ξ et des η, on a aussi, comme on sait:

$$R_0\cos^2\alpha + T_0\sin^2\alpha = -\frac{1}{\varrho}\,; \quad R_0 = -\frac{1}{\varrho_1}\,; \quad T_0 = -\frac{1}{\varrho_2}.$$

Par conséquent:

$$r_0 s_0 = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\sin\alpha\cos\alpha,$$

et la formule (12) pourra, pour toutes les surfaces, s'écrire sous la forme:

$$\varDelta = \frac{1}{360}\left(\frac{\sin 2\alpha}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\right)^2\sigma^5. \tag{13}$$

La continuation du développement de $\varDelta$ n'offre d'autre difficulté que celle d'écrire le grand nombre de termes qu'entraîne nécessairement la détermination des ordres plus élevés. Veut-on, par exemple, représenter l'intégrale avec une exactitude poussée jusqu'au 7^e ordre inclusivement, la différentielle devra contenir tous les termes du 6^e ordre et alors, en intégrant, la formule (11) recevra l'augmentation suivante:

$$\left.\begin{aligned} &-y_0''' y_0^{IV}\cdot\frac{x_1^6}{144} - y_0''' y_0^{V}\cdot\frac{x_1^7}{630} - y_0^{IV} y_0^{IV}\cdot\frac{x_1^7}{896} + (Z_0'' Z_0^{V} - z_0'' z_0^{V})\frac{x_1^6}{144} + (Z_0'' Z_0^{VI} - z_0'' z_0^{VI})\frac{x_1^7}{840}\\ &+(Z_0''' Z_0^{IV} - z_0''' z_0^{IV})\frac{x_1^6}{72} + (Z_0''' Z_0^{V} - z_0''' z_0^{V})\frac{x_1^7}{336} + (Z_0^{IV} Z_0^{IV} - z_0^{IV} z_0^{IV})\frac{x_1^7}{504}\\ &-(Z_0''^3 Z_0^{IV} - z_0''^3 z_0^{IV})\frac{x_1^7}{84} + \frac{5}{756}\,y_0''' y_0''' z_0'' z_0''\cdot x_1^7, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

où nous avons omis les termes qui, d'après les valeurs déjà trouvées pour z_0'', z_0''' et Z_0'', Z_0''', sont du 8^e ordre ou d'un ordre plus élevé.

En continuant la différentiation des équations différentielles de la surface, il faudra ensuite déterminer les expressions générales de z^V et de z^{VI}, et, si l'on se borne également ici à indiquer ces grandeurs avec l'exactitude nécessaire, on aura, outre les valeurs déjà citées de z_0'', z_0''', z_0^{IV} et de Z_0'', Z_0''', Z_0^{IV}:

$$\begin{aligned} z_0^{V} &= r_0''' + 5\,s_0 y_0^{IV} + 10\,s_0' y_0'''\,; & Z_0^{V} &= r_0''' + 5\,s_0''' c + \cdots\\ z_0^{VI} &= r^{IV}{}_0 + 6\,s_0 y_0^{V} + 15\,s_0' y_0^{IV} + 20\,s_0'' y_0''' + 10\,t_0 y_0''' y_0'''\,; & Z_0^{VI} &= r_0^{IV} + 6\,s_0^{IV} c + \cdots, \end{aligned}$$

valeurs qui donnent pour les coefficients:

$$(Z_0'' Z_0'' - z_0'' z_0'') = r_0 s_0 \left(\frac{2}{3} y_0''' \cdot x_1^2 + \frac{1}{6} y_0^{IV} \cdot x_1^3 + \frac{1}{30} y_0^V x_1^4 \right) + (r_0 t_0 + 2 s_0 s_0)\, y_0''' y_0''' \cdot \frac{x_1^4}{18};$$

$$(Z_0'' Z_0''' - z_0'' z_0''') = (2 s_0 r_0' + 3 r_0 s_0') \left(y_0''' \cdot \frac{x_1^2}{6} + y_0^{IV} \cdot \frac{x_1^3}{24} \right);$$

$$(Z_0'' Z_0^{IV} - z_0'' z_0^{IV}) = (s_0 r_0'' + 2 r_0 s_0'')\, y_0''' \cdot \frac{x_1^2}{3} - 4 r_0 s_0 y_0''';$$

$$(Z_0'' Z_0^V - z_0'' z_0^V) = -5 r_0 s_0 y_0^{IV} - 10 r_0 s_0' y_0''';$$

$$(Z_0'' Z_0^{VI} - z_0'' z_0^{VI}) = -6 r_0 s_0 y_0^V - 15 r_0 s_0' y_0^{IV} - 20 r_0 s_0'' y_0''' - 10 r_0 t_0 y_0''' y_0''';$$

$$(Z_0''' Z_0''' - z_0''' z_0''') = r_0' s_0' y_0''' x_1^2;$$

$$(Z_0''' Z_0^{IV} - z_0''' z_0^{IV}) = -4 r_0' s_0 y_0''';$$

$$(Z_0''' Z_0^V - z_0''' z_0^V) = -5 r_0' s_0 y_0^{IV} - 10 r_0' s_0' y_0''';$$

$$(Z_0^{IV} Z_0^{IV} - z_0^{IV} z_0^{IV}) = -8 r_0'' s_0 y_0''' - 16 s_0 s_0 y_0''' y_0''';$$

$$(Z_0''^4 - z_0''^4) = \frac{4}{3} r_0^3 s_0 y_0''' x_1^2;$$

$$(Z_0''^3 Z_0^{IV} - z_0''^3 z_0^{IV}) = -4 r_0^3 s_0 y_0''';$$

Enfin, en substituant ces valeurs dans (11) et (14), on trouvera après avoir réduit et ordonné les termes:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta = & -(y_0''' y_0''' + 2 r_0 s_0 y_0''') \frac{x^5}{90} - (y_0''' y_0^{IV} + r_0 s_0 y_0^{IV} + r_0 s_0' y_0''' + 2 r_0' s_0 y_0''') \frac{x^6}{144} - (y_0''' y_0^V + r_0 s_0 y_0^V) \frac{x^7}{630} \\ & -(y_0^{IV} y_0^{IV} + 2 r_0 s_0' y_0^{IV} + 4 r_0' s_0 y_0^{IV}) \frac{x^7}{896} - \left(\frac{1}{756} (2 r_0 t_0 - 5 r_0 r_0 + 10 s_0 s_0)\, y_0''' y_0''' - \frac{1}{70} r_0^3 s_0 y_0''' \right) x^7 \\ & -(r_0 s_0'' + 3 s_0 r_0'' + 3 r_0' s_0')\, y_0''' \cdot \frac{x^7}{630} \end{aligned}\right\} . \quad (15)$$

Comme il a été expliqué plus haut, le terme du 5^e ordre donne le coefficient différentiel $y_0''' = -r_0 s_0$, et, après la substitution de cette valeur dans les termes suivants, on voit d'abord que y_0^{IV} disparaît du coefficient du terme du 6^e ordre, ce coefficient se trouvant réduit à la constante $+\frac{1}{144} r_0 s_0 (r_0 s_0' + 2 s_0 r_0')$, et ensuite que y_0^V disparaît de la même manière du terme du 7^e ordre, dont le coefficient, à l'exception de la grandeur $-\frac{1}{896}(y_0^{IV} y_0^{IV} + (2 r_0 s_0' + 4 s_0 r')\, y_0^{IV})$, ne renferme que des parties constantes. Le maximum de ce coefficient exige donc que l'on pose $y_0^{IV} = -(r_0 s_0' + 2 s_0 r_0')$, et la ligne géodésique sera ainsi, pour toutes les surfaces, déterminée par:

$$y_0''' = -r_0 s_0; \quad y_0^{IV} = -(r_0 s_0' + 2 s_0 r_0'). \quad (16)$$

En remplaçant dans (15) x par σ, ce qui, suivant (13), entraîne l'addition de la grandeur $-\frac{1}{108} r_0^4 s_0^2 \cdot \sigma^7$, on obtient pour la différence $\varDelta$, jusqu'aux termes du 7^e ordre inclusivement, la valeur:

$$\varDelta = \frac{1}{90} r_0^2 s_0^2 \cdot \sigma^5 + \frac{1}{144} r_0 s_0 (r_0 s_0' + 2 s_0 r_0')\, \sigma^6 + \left(\frac{1}{896} (r_0 s_0' + 2 s_0 r_0')^2 + g \right) \sigma^7, \quad (17)$$

où, pour abréger, nous avons posé:

$$g = \frac{1}{630} r_0 s_0 (r_0 s_0'' + 3 s_0 r_0'' + 3 s_0' r_0') - \frac{1}{1890} r_0^2 s_0^2 (5 r_0 t_0 + 25 s_0 s_0 + 32 r_0 r_0). \quad (18)$$

Remarquons encore que, si l'on fait entrer dans (17) les valeurs des coefficients différentiels y_0''' et y_0^{IV} déterminées par (16), la formule pourra s'écrire sous la forme plus simple:

$$\varDelta = \frac{1}{90} y_0''' y_0''' \cdot \sigma^5 + \frac{1}{144} y_0''' y_0^{IV} \cdot \sigma^6 + \left(\frac{1}{896} y_0^{IV} y_0^{IV} + g\right) \sigma^7, \tag{19}$$

et, si l'on veut en même temps employer y_0^V, qui a pour expression:

$$y_0^V = -(r_0 s_0'' + 3 s_0 r_0'' + 3 s_0' r_0') + r_0 s_0 (r_0 t_0 + 12 s_0 s_0 + 3 r_0 r_0),$$

il sera également facile de montrer que g peut être représenté par:

$$g = \frac{1}{630} y_0''' y_0^V - \frac{1}{1890} \left(\frac{11}{\varrho_1 \varrho_2} - \frac{9}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) + \frac{32}{\varrho\varrho}\right) y_0''' y_0'''. \tag{20}$$

Pour l'angle δ que fait la ligne géodésique avec la section normale qui passe par son extrémité B, on a d'après tang $\delta = c$:

$$\delta = c - \frac{1}{3} c^3 + \cdots = \frac{1}{6} y_0''' x_1^2 + \frac{1}{24} y_0^{IV} x_1^3 + \cdots$$

par conséquent, jusqu'au 3[e] ordre inclusivement:

$$\delta = -\frac{1}{6} r_0 s_0 \cdot \sigma^2 - \frac{1}{24} (r_0 s_0' + 2 s_0 r_0') \sigma^3. \tag{21}$$

Si l'on veut aussi déterminer l'angle γ que la ligne géodésique fait avec la section normale réciproque qui contient la normale au point B, dont les coordonnées sont x_1, y_1 et z_1, il suffira de chercher les coordonnées X_1 et Y_1 du point d'intersection de cette normale avec le plan des xy, puisqu'on aura alors tang $\gamma = \frac{Y_1}{X_1}$. Mais les équations de la normale sont:

$$(X - x_1) + p_1 (Z - z_1) = 0; \qquad (Y - y_1) + q_1 (Z - z_1) = 0,$$

qui, pour $Z = 0$, donnent:

$$X_1 = x_1 + p_1 z_1; \qquad Y_1 = y_1 + q_1 z_1;$$

par conséquent:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y_1 + q_1 z_1}{x_1 + p_1 z_1} = \frac{\left(y_0''' \cdot \frac{x_1^2}{6} + y_0^{IV} \cdot \frac{x_1^3}{24} + \cdots\right) + q_1 \left(z_0'' \cdot \frac{x_1}{2} + z_0''' \cdot \frac{x_1^2}{6} + \cdots\right)}{1 + p_1 \left(z_0'' \cdot \frac{x_1}{2} + z_0''' \cdot \frac{x_1^2}{6} + \cdots\right)}$$

où le développement en série de la surface par les coefficients différentiels partiels donnera:

$$p_1 = (r_0 x_1 + s_0 y_1) + \frac{1}{2} (r_0' x_1 x_1 + 2 s_0' x_1 y_1 + t_0' y_1 y_1) + \cdots$$

$$q_1 = (s_0 x_1 + t_0 y_1) + \frac{1}{2} (s_0' x_1 x_1 + 2 t_0' x_1 y_1 + u_0' y_1 y_1) + \cdots.$$

En limitant le développement de γ au 3[e] ordre inclusivement, le dénominateur, dans l'expression de tang γ, est réduit à 1, et il vient alors:

$$\operatorname{tg} \gamma = y_0''' \cdot \frac{x_1^2}{6} + y_0^{IV} \cdot \frac{x_1^3}{24} + \left(s_0 x_1 + \frac{1}{2} s_0' x_1 x_1\right)\left(z_0'' \cdot \frac{x_1}{2} + z_0''' \cdot \frac{x_1^2}{6}\right)$$

$$= (y_0''' + 3 s_0 z_0'') \frac{x_1^2}{6} + (y_0^{IV} + 4 s_0 z_0''' + 6 s_0' z_0'') \frac{x_1^3}{24};$$

équation qui, par la substitution des valeurs de y_0''', y_0^{IV}, z_0'' et z_0''', donne:

$$\gamma = +\frac{1}{3} r_0 s_0 \sigma^2 + \frac{1}{24}(5\, r_0 s_0' + 2\, s_0 r_0')\, \sigma^3. \tag{22}$$

Les formules (21) et (22) montrent que le rapport entre les angles δ et γ, qui est connu pour le sphéroïde, s'applique en général à toutes les surfaces. Sauf dans quelques cas spéciaux, où le coefficient $r_0 s_0$ lui-même se réduit à une grandeur du 1^er^ ordre ou d'un ordre plus élevé, ce qui évidemment a lieu lorsque la ligne est très rapprochée d'une des sections normales principales, la ligne géodésique, pour des valeurs suffisamment petites de σ, sera toujours renfermée entre les deux sections normales, et la valeur numérique de γ tendra de plus en plus à devenir deux fois plus grande que la valeur correspondante de δ.

§ 3. La ligne géodésique et les sections normales sur le sphéroïde.

Pour le sphéroïde terrestre, où les rayons de courbure ϱ, ϱ_1 et ϱ_2 sont respectivement désignés par R, M et N, on a, en rapportant la surface aux coordonnées ξ, η et z, l'équation:

$$\frac{1}{M}\cdot\xi\xi + \frac{1}{N}\cdot\eta\eta + 2\,A\,\xi z + Bzz + 2\,z = 0,$$

où, pour abréger, nous avons posé:

$$A = \frac{e^2 \sin\lambda \cos\lambda}{N(1-e^2)}; \qquad B = \frac{1-e^2\cos^2\lambda}{N(1-e^2)}. \tag{23}$$

Si l'on substitue à ξ et à η les expressions données plus haut, à savoir:

$$\xi = -\cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y; \qquad \eta = +\sin\alpha\cdot x - \cos\alpha\cdot y$$

et pose en outre:

$$C = \frac{\sin^2\alpha}{M} + \frac{\cos^2\alpha}{N}; \qquad D = \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)\sin\alpha\cos\alpha \tag{24}$$

on obtiendra l'équation transformée:

$$2\,u = \frac{1}{R}\cdot xx + C\,yy + 2\,Dxy - 2\,A(\cos\alpha\cdot x + \sin\alpha\cdot y)z + Bzz + 2\,z = 0. \tag{25}$$

Dans les deux équations différentielles partielles du 1^er^ ordre:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)p + \left(\frac{du}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{du}{dz}\right)q + \left(\frac{du}{dy}\right) = 0 \tag{26}$$

on aura ainsi:

$$\left(\frac{du}{dz}\right) = Bz - A\cos\alpha\cdot x - A\sin\alpha\cdot y + 1;$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{R}x + Dy - A\cos\alpha\cdot z;$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right) = Dx + Cy - A\sin\alpha\cdot z;$$

et la différentiation des équations (26) étant poussée plus loin, elle donnera avec facilité:

$$\left(\frac{du}{dz}\right) t + (Bq - 2\,A \sin\alpha)\, q + C = 0\,;$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right) r \;+ (Bp - 2\,A \cos\alpha)\, p + \frac{1}{R} = 0\,; \qquad \left(\frac{du}{dz}\right) s \;+ (Bp - A\cos\alpha)\, q - A \sin\alpha \cdot p + D = 0\,;$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right) r' + (3\,Bp - 3\,A\cos\alpha)\, r = 0\,; \qquad \left(\frac{du}{dz}\right) s' + (2\,Bp - 2\,A\cos\alpha)\, s + (Bq - A\sin\alpha)\, r = 0\,;$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right) r'' + (4\,Bp - 4\,A\cos\alpha)\, r' + 3\,Brr = 0\,; \qquad \left(\frac{du}{dz}\right) s'' + (3\,Bp - 3\,A\cos\alpha)\, s' + (Bq - A\sin\alpha)\, r' + 3\,Brs = 0$$

d'où l'on tire, en introduisant les valeurs pour l'origine A:

$$r_0 = -\frac{1}{R}\,; \qquad t_0 = -C\,; \qquad s_0 = -D\,;$$

$$r_0' = 3\,A\cos\alpha \cdot r_0\,; \qquad s_0' = A\sin\alpha \cdot r_0 + 2\,A\cos\alpha \cdot s_0\,;$$

$$r_0'' = 4\,A\cos\alpha \cdot r_0' - 3\,B\,r_0 r_0\,; \qquad s_0'' = A\sin\alpha \cdot r_0' + 3\,A\cos\alpha \cdot s_0' - 3\,B\,r_0 s_0\,.$$

A l'aide de ces valeurs, toutes les formules générales développées dans le paragraphe précédent peuvent être appliquées au sphéroïde, où, par l'emploi des relations connues entre a, e^2, M, N et R, elles se laissent représenter sous une forme plus ou moins élégante.

De la formule (16) l'on tire ainsi:

$$\left.\begin{aligned} y_0''' &= -r_0 s_0 = -\frac{D}{R} = -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{e^2\cos^2\lambda\sin\alpha\cos\alpha}{RN(1-e^2)}\cdots \\ y_0^{IV} &= -(r_0 s_0' + 2\,s_0 r_0') = -\frac{A\sin\alpha}{R}\left(\frac{1}{R} + 8\,D\cot\alpha\right) = -\frac{e^2\sin\lambda\cos\lambda\sin\alpha}{RN(1-e^2)}\left(\frac{9}{R} - \frac{8}{N}\right)\cdots \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

où l'expression de y_0''' s'accorde naturellement avec la valeur de $-r_0 s_0$ que nous avons trouvée plus haut pour une surface quelconque.

La formule (19) donne également:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta = \frac{1}{90}\left(\frac{e^2\cos^2\lambda\sin\alpha\cos\alpha}{RN(1-e^2)}\right)^2\sigma^5 + \frac{1}{144}\left(\frac{e^2\cos^2\lambda\sin\alpha}{RN(1-e^2)}\right)^2\left(\frac{9}{R} - \frac{8}{N}\right)\cos\alpha\ \mathrm{tg}\,\lambda\cdot\sigma^6 \\ + \left(\frac{1}{896}\left(\frac{e^2\cos^2\lambda\sin\alpha}{RN(1-e^2)}\right)^2\left(\frac{9}{R} - \frac{8}{N}\right)^2\mathrm{tg}^2\lambda + g\right)\sigma^7 \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

et, si l'on veut en même temps déterminer g au moyen de (18), on trouve après une réduction facile:

$$(r_0 s_0'' + 3\,s_0 r_0'' + 3\,r_0' s_0') = (15\,AA\sin\alpha\cos\alpha\,.\,r_0 r_0 + 60\,AA\cos^2\alpha\cdot r_0 s_0 - 12\,B r_0 r_0 s_0)$$

$$= r_0 s_0\left\{\left(\frac{87}{R} - \frac{60}{N}\right)\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)tg^2\lambda + \frac{12}{RN}\right\}$$

$$(5\,r_0 t_0 + 25\,s_0 s_0 + 32\,r_0 r_0) = (5\,(r_0 t_0 - s_0 s_0) + 30\,(r_0 r_0 + s_0 s_0) + 2\,r_0 r_0)$$

$$= \left(\frac{30}{RM} + \frac{30}{RN} - \frac{25}{MN} + \frac{2}{RR}\right),$$

et, par conséquent:

$$g = \left(\frac{e^2\cos^2\lambda\sin\alpha\cos\alpha}{RN(1-e^2)}\right)^2\left\{\left(\frac{29}{R} - \frac{20}{N}\right)\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)\frac{\mathrm{tg}^2\lambda}{210} - \frac{1}{1890}\left(\frac{30}{RM} - \frac{6}{RN} - \frac{25}{MN} + \frac{2}{RR}\right)\right\}.$$

Comme on le voit, tous les coefficients de (28) sont des grandeurs très petites de l'ordre e^4, qui, pour des valeurs plus grandes de σ, où e et non e^2 est censé être du même ordre que σ, devront être rapportées au 4e ordre. Si l'on met en évidence le facteur commun à tous les termes $\left(\frac{e^2 \cos^2 \lambda \sin \alpha}{RN(1-e^2)}\right)^2$, Δ pourra s'écrire sous la forme plus simple:

$$\Delta = \left\{\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)\frac{\sin \alpha}{R}\right\}^2 \cdot \left\{\frac{1}{90}\cos^2 \alpha \cdot \sigma^5 + \frac{1}{144}\left(\frac{9}{R} - \frac{8}{N}\right)\cos \alpha \operatorname{tg} \lambda \cdot \sigma^6 + \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \lambda}{896}\left(\frac{9}{R} - \frac{8}{N}\right)^2 + g'\right)\sigma^7\right\} \tag{29}$$

où g' a pour valeur:

$$g' = -\frac{1}{1890} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{RR} + \left\{\left(\frac{29}{R} - \frac{20}{N}\right)\frac{\operatorname{tg}^2 \lambda}{210} - \frac{5 \cos^2 \alpha}{378\, M} - \frac{5 + \cos^2 \alpha}{1890\, R}\right\}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{N}\right) \tag{30}$$

et, en négligeant dans les coefficients de σ^6 et de σ^7 les grandeurs de l'ordre e^6, sous la forme encore plus simple:

$$\Delta = \left\{\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)\frac{\sin \alpha}{R}\right\}^2 \cdot \left\{\frac{\cos^2 \alpha}{90}\sigma^5 + \frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \lambda}{144\, R}\sigma^6 + \frac{1}{896\, RR}\left(\operatorname{tg}^2 \lambda - \frac{64}{135}\cos^2 \alpha\right)\sigma^7\right\}. \tag{31}$$

Enfin, les formules (21) et (22) donnent pour les angles δ et γ:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= -\frac{1}{6}\left(\frac{e^2 \cos^2 \lambda \sin \alpha}{RN(1-e^2)}\right)\left\{\cos \alpha \cdot \sigma^2 + \frac{1}{4}\operatorname{tang} \lambda \left(\frac{9}{R} - \frac{8}{N}\right)\sigma^3\right\} \\ \gamma &= +\frac{1}{3}\left(\frac{e^2 \cos^2 \lambda \sin \alpha}{RN(1-e^2)}\right)\left\{\cos \alpha \cdot \sigma^2 + \frac{1}{8}\operatorname{tang} \lambda \left(\frac{21}{R} - \frac{16}{N}\right)\sigma^3\right\} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

expressions qui se réduisent à:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= -\frac{1}{6}\left(\frac{e^2 \cos^2 \lambda \sin \alpha}{RN(1-e^2)}\right)\left\{\cos \alpha \cdot \sigma^2 + \frac{1}{4}\frac{\operatorname{tg} \lambda}{R} \cdot \sigma^3\right\} \\ \gamma &= +\frac{1}{3}\left(\frac{e^2 \cos^2 \lambda \sin \alpha}{RN(1-e^2)}\right)\left\{\cos \alpha \cdot \sigma^2 + \frac{5}{8}\frac{\operatorname{tg} \lambda}{R} \cdot \sigma^3\right\} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

si, dans les coefficients de σ^3, on néglige les grandeurs de l'ordre e^4.

Nous nous servirons des formules (33) pour examiner en détail la position de la ligne géodésique relativement aux sections normales, recherche dans laquelle, grâce à la symétrie du sphéroïde, tant par rapport au plan de l'équateur qu'à celui d'un méridien quelconque, il suffira de considérer une origine A sur l'hémisphère nord et une ligne AB dirigée vers l'Ouest, ou des azimuts α variant entre 0° et 180°. Pour les valeurs limites, où $\sin \alpha = 0$, on a évidemment $\delta = \gamma = 0$, et les trois courbes coïncideront alors avec le méridien lui-même. Dans le premier quadrant, δ est toujours négatif et γ toujours positif, tandis que, dans le second, δ est positif et γ négatif aussi longtemps que le premier terme conserve sa prépondérance et détermine le signe. Comme, dans le système de coordonnées dont nous nous servons, où la tangente en A est l'axe des abscisses, une valeur positive donne la position de l'angle à gauche de la ligne AB, mais une négative à droite de la même ligne, ces déterminations de δ et de γ peuvent être comprises dans la règle générale, que la ligne géodésique AB est renfermée entre la section normale directe $AA'B$ et la section réciproque $BB'A$, la ligne étant toujours plus rapprochée du méridien que la section $AA'B$. Les exceptions à cette règle peuvent seulement se produire dans le deuxième quadrant, lorsque l'azimut α est si rapproché de 90° que $\cos \alpha$ se réduit à une grandeur du même ordre que σ. Mais si l'on pose $\alpha = 90° + \zeta$, ζ étant une grandeur du 1er ordre, les formules (33) donneront jusqu'aux termes de l'ordre $e^2\sigma^3$ inclusivement:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= +\frac{1}{6}\left(\frac{e^2}{1-e^2} \cdot \frac{\sigma\sigma}{RN}\cos^2 \lambda\right)\left\{\zeta - \frac{1}{4}\operatorname{tg} \lambda \cdot \frac{\sigma}{R}\right\} \\ \gamma &= -\frac{1}{3}\left(\frac{e^2}{1-e^2} \cdot \frac{\sigma\sigma}{RN}\cos^2 \lambda\right)\left\{\zeta - \frac{5}{8}\operatorname{tg} \lambda \cdot \frac{\sigma}{R}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

valeurs qui montrent clairement la position mutuelle des courbes dans le voisinage du point A. Pour ζ croissant depuis zéro, mais $< \frac{1}{4} \operatorname{tg} \lambda \cdot \frac{\sigma}{R}$, δ et γ continueront de garder les mêmes signes que dans le premier quadrant. Si $\zeta = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \lambda \cdot \frac{\sigma}{R}$, on a $\delta = 0$, et la section $AA'B$ devient tangente à AB à l'origine même. La section normale directe commence ensuite à se déplacer de droite à gauche par rapport à AB, qu'elle coupe en des points de plus en plus éloignés de A jusqu'à ce que, ζ devenant égal à $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \lambda \cdot \frac{\sigma}{R}$, ce qui donne $\delta = \gamma$, elle coïncide complètement avec $BB'A$. A partir de ce moment $BB'A$ passe à la droite de $AA'B$, mais on a seulement $\gamma = 0$ lorsque $\zeta = \frac{5}{8} \operatorname{tg} \lambda \cdot \frac{\sigma}{R}$. La section normale réciproque rejoint alors la ligne géodésique qu'elle touche en A, et ce n'est que pour des valeurs encore plus grandes de ζ que γ prend enfin le signe normal du 2[e] quadrant, la section passant à la droite de AB, qu'elle coupe successivement en des points toujours plus éloignés.

Pour compléter cette recherche, il est nécessaire de déterminer avec précision les intersections de la section normale avec la ligne géodésique. Si la section $AA'B$, outre les points A et B de la ligne, doit aussi en contenir un troisième S, qui retranche la longueur d'arc $AS = \sigma_1$, il faut évidemment que σ_1 substitué à σ dans la première des équations (34), donne à δ la même valeur que σ, ou, en d'autres termes, que σ_1 soit déterminé par l'équation:

$$\zeta \sigma_1^2 - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{tg} \lambda}{R} \cdot \sigma_1^3 = \zeta \sigma^2 - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{tg} \lambda}{R} \sigma^3.$$

Cette équation ayant la racine $\sigma_1 = \sigma$, si on la divise par le facteur $\sigma_1 - \sigma$, elle se réduira à:

$$\zeta (\sigma_1 + \sigma) - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{tg} \lambda}{R} (\sigma_1^2 + \sigma \sigma_1 + \sigma^2) = 0,$$

ou si, avec une exactitude plus que suffisante, on remplace R par N et pose pour abréger $\sigma_0 = \zeta N \cot \lambda$, à:

$$\sigma_1^2 - (4\sigma_0 - \sigma)\, \sigma_1 - (4\sigma_0 - \sigma)\, \sigma = 0, \tag{35}$$

où σ_0 varie proportionnellement à $\zeta = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{N} \cdot \sigma_0$.

En résolvant l'équation (35) on trouve:

$$\sigma_1 = 2\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma \pm \sqrt{\left(2\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma\right)\left(2\sigma_0 + \frac{3}{2}\sigma\right)}. \tag{36}$$

Comme on voit, il n'y a pas d'intersection pour $\sigma_0 < \frac{1}{4}\sigma$, les valeurs de σ_1 étant alors imaginaires. Pour $\sigma_0 = \frac{1}{4}\sigma$ on a $\sigma_1 = 0$, et $\sigma_0 > \frac{1}{4}\sigma$ donne toujours des valeurs réelles, à savoir une racine négative dont nous ne nous occuperons pas ici, et une positive qui croît d'une manière continue avec σ_0. Le point d'intersection S parcourt rapidement toute la ligne AB, puisqu'on a déjà $\sigma_1 = \sigma$ pour $\sigma_0 = \frac{3}{8}\sigma$, tandis que, pour des valeurs encore plus grandes de σ_0, S se transporte au delà du point B sur le prolongement de la ligne géodésique.

Examinons de plus près la signification géométrique de la grandeur σ_0, puisqu'elle contribue essentiellement à jeter du jour sur tous les points traités ci-dessus. Lorsque l'azimut de AB dépasse le premier quadrant et devient $90° + \zeta$, la ligne géodésique se mouvra bien d'abord vers le Nord, mais elle atteint bientôt un maximum de latitude nord d'où, après être devenue tangente au parallèle correspondant, elle revient vers le Sud en prenant une position parfaitement symétrique par rapport au méridien qui passe par le point maximum. La distance entre ce point et A est facile à déterminer, la ligne AB pouvant, avec une grande exactitude, être considérée comme située sur une sphère de rayon N, ayant le même axe polaire que le sphéroïde et osculatrice de ce dernier le long du parallèle de l'origine. Les deux méridiens passant par le point maximum et par A forment avec AB un triangle sphérique rectangle, dans lequel la distance cherchée est un des côtés de l'angle droit, qui fait avec l'hypoténuse un angle de $90 - \zeta$, tandis que l'hypoténuse elle-même est égale à $90 - \lambda$, de sorte que, jusqu'aux termes du 2[e] ordre inclusivement, ce côté de l'angle droit est exprimé par $\zeta N \cot\lambda$, ou justement par la valeur de σ_0, qui ainsi donne toujours la distance de A au point le plus septentrional de la ligne. Il devient en même temps possible de déterminer le point S', où la section normale réciproque $BB'A$ coupe AB; en se servant de la formule (34), que la symétrie du sphéroïde par rapport au méridien rend également applicable à une direction orientale de la ligne. En effet, si l'on transporte pour un moment l'origine en B, $BB'A$ deviendra la section normale directe pour cette origine et la distance de B au point maximum sera évidemment déterminée par $(\sigma - \sigma_0)$. Pour $(\sigma - \sigma_0)$ variant de $\frac{1}{4}\sigma$ à $\frac{3}{8}\sigma$, le point d'intersection parcourt donc successivement la ligne AB de B à A, ou, ce qui revient au même, pour σ_0 variant de $\frac{5}{8}\sigma$ à $\frac{3}{4}\sigma$, le point S' se déplace successivement de A en B.

Pour conclure, nous donnerons encore un résumé des résultats obtenus ci-dessus, en considérant les azimuts qui parcourent les 4 quadrants depuis 0° jusqu'à 360°.

Les relations normales ont lieu lorsque la ligne géodésique, dans toute l'étendue de A à B, se meut d'une manière continue soit vers le Sud soit vers le Nord. La ligne AB est alors complètement renfermée entre les sections $AA'B$ et $BB'A$, et elle est toujours plus rapprochée du méridien que la section normale directe.

Les relations anormales surviennent seulement dans le 2[e] et le 3[e] quadrant, lorsque la ligne AB est tellement rapprochée de la perpendiculaire au méridien, qu'après s'être d'abord dirigée vers le Nord en passant par l'arc σ_0, elle finit par parcourir $\sigma - \sigma_0$ en marchant vers le Sud pour atteindre l'extrémité B. La valeur σ_0 doit donc être toujours plus petite que σ, et les particularités caractéristiques dans la position mutuelle des courbes se manifesteront alors par les variations de cette valeur dans les intervalles mentionnés ci-après:

1) De 0 à $\frac{1}{4}\sigma$ et de $\frac{3}{4}\sigma$ à σ, la ligne AB est encore complètement renfermée entre les sections normales, et les relations anormales se réduisent à ceci, que la ligne géodésique, dans le premier intervalle entre A et le point maximum et dans le dernier entre B et ce même point, est plus éloignée du méridien dont il s'agit que la section normale directe qui part respectivement de A et de B.

2) De $\frac{1}{4}\sigma$ à $\frac{3}{8}\sigma$ et de $\frac{5}{8}\sigma$ à $\frac{3}{4}\sigma$, la ligne AB n'est renfermée qu'en partie entre les sections normales. En effet, les points d'intersection de la ligne avec $AA'B$, dans le premier intervalle, et avec $BB'A$, dans le dernier, parcourront successivement toute l'étendue de A à B, tandis que la seconde section normale, respectivement $BB'A$ et $AA'B$, restera toujours entièrement au sud de AB.

3) De $\frac{3}{8}\sigma$ à $\frac{5}{8}\sigma$, la ligne AB est tout entière en dehors des sections normales, qui sont situées au sud de cette ligne et qui, pour $\sigma_0 = \frac{1}{2}\sigma$, coïncident complètement, le point extrême B ayant alors la même latitude que l'origine A.

§ 4. Formules pour le calcul des triangles géodésiques.

Le problème de la recherche des formules les plus rigoureuses et les plus pratiques pour le calcul des triangles géodésiques, doit certainement être rangé au nombre des plus importants que la haute géodésie ait à traiter. Comme on sait, c'est GAUSS qui, dans ses « Disquisitiones generales circa superficies curvas », a le premier démontré que les triangles géodésiques formés sur la surface sphéroïdique de la terre se laissent calculer par une simple application du théorème de LEGENDRE, l'expression seule de l'excès recevant une forme plus générale par la substitution des mesures de la courbure relatives à la surface aux mesures correspondantes de la sphère. Et ce qui mérite surtout d'être relevé, c'est que l'exactitude des résultats ne souffre en rien de l'extension donnée au théorème, les angles et les côtés étant toujours déterminés avec la même précision respectivement jusqu'aux termes du 3e et du 4e ordre inclusivement. Mais le développement de GAUSS n'est effectué en entier que jusqu'aux termes de ces deux ordres, et comme il est en même temps lié à des recherches assez difficiles sur les propriétés des surfaces courbes, il ne sera pas sans intérêt de faire connaître une méthode indépendante pour traiter le problème, méthode qui montre que ce dernier est d'une nature beaucoup plus élémentaire, et se laisse résoudre d'une manière relativement facile avec toute l'exactitude qu'on peut désirer.

En maintenant toujours l'hypothèse que les côtés des triangles, comparés aux rayons de courbure de la surface, sont de petites grandeurs du 1er ordre, nous commencerons également ici par donner au problème une bien plus grande généralité et, à cet effet, nous considérerons tous les triangles qui, sur une surface donnée quelconque, peuvent être formés en joignant trois points donnés par des courbes données quelconques. Désignons les angles d'un pareil triangle par A, B, C, et les côtés opposés par a, b, c, et, pour plus de clarté, supposons encore que le côté b, vu de l'origine A, soit à gauche du côté c. Si maintenant A^*, B^* et C^* désignent les angles du triangle plan construit avec les mêmes côtés a, b et c, le problème consistera à déterminer les différences $A - A^*$, $B - B^*$ et $C - C^*$, ou, ce qui est suffisant, puisque la même formule, par un simple changement de lettres, doit donner les trois différences, à déterminer la grandeur de $A - A^*$. Les trois cordes qui joignent les sommets A, B et C forment en outre un triangle plan, et si dans ce triangle l'angle $\mathfrak{A}$ et les côtés $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ correspondent respectivement à A, a, b et c, on a évidemment l'équation:

$$\cos \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2}{2\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \tag{37}$$

Mais l'angle A_0 entre les deux sections normales qui, au point A, peuvent être menées par C et B sera dans une relation très simple avec $\mathfrak{A}$, car β et γ désignant les angles que les tangentes aux sections normales font avec les cordes correspondantes $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$, on aura:

$$\cos \mathfrak{A} = \sin\beta \sin\gamma + \cos\beta \cos\gamma \cos A_0,$$

formule qui, combinée avec (37), donne:

$$\cos A_0 = \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2}{2\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\beta\cos\gamma} - \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\gamma,$$

et par conséquent:

$$\cos A^* - \cos A_0 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} - \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2}{2\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\beta\cos\gamma} + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma. \tag{38}$$

Maintenant, comme on pourra toujours, lorsque la surface est connue et que les côtés du triangle sont des courbes complètement définies, exprimer à l'aide des côtés a, b, c, aussi bien les cordes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ que les angles β et γ, et déterminer en même temps les différences entre les azimuts des côtés b et c et des sections normales correspondantes passant par C et B, ou la différence $A - A_0$ elle-même, le problème doit être considéré comme résolu, la formule (38) donnant $A_0 - A^*$ et par suite aussi;

$$A - A^* = (A_0 - A^*) + (A - A_0).$$

Si l'on applique cette solution très générale à la surface sphéroïdique de la terre, et se borne à considérer les triangles dont les côtés sont renfermés entre les deux sections normales mentionnées plus haut et qui peuvent, relativement à la longueur, être regardés comme coïncidant avec elles, on aura jusqu'aux termes du 4[e] ordre inclusivement:

$$\mathfrak{a} = a - \frac{a^3}{24 R_1^2}; \quad \mathfrak{b} = b - \frac{b^3}{24 R_2^2}; \quad \mathfrak{c} = c - \frac{c^3}{24 R_3^2};$$

et jusqu'aux termes du 2[e] ordre inclusivement:

$$\beta = \frac{b}{2 R_2}; \quad \gamma = \frac{c}{2 R_3};$$

R_1, R_2 et R_3 désignant respectivement les rayons de courbure du côté a à l'origine C, et des côtés b et c à leur origine commune A.

Mais si, dans le développement de $A - A^*$, on se contente d'une exactitude allant jusqu'aux termes du 3[e] ordre inclusivement, l'équation (38) donne:

$$(A_0 - A^*) \sin A^* = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\, bc} - \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2}{2\, \mathfrak{b}\mathfrak{c}} \left\{ 1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} \right\} + \beta\gamma,$$

qui, par la substitution des valeurs ci-dessus, devient avec la même exactitude:

$$(A_0 - A^*) \sin A^* = \frac{1}{24\, bc} \left\{ \frac{b^4}{R_2^2} + \frac{c^4}{R_3^2} - \frac{a^4}{R_1^2} \right\} - \frac{\cos A^*}{6} \left\{ \frac{b^2}{R_2^2} + \frac{c^2}{R_3^2} \right\} + \frac{bc}{4\, R_2 R_3}.$$

En désignant par z_1, z_2 et z_3 les azimuts de a, b et c, et par N et λ respectivement la normale et la latitude à l'origine A, on pourra, en conservant les termes du 1[er] ordre, ce qui évidemment est suffisant, poser:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{N}(1 + e^2 \cos^2 \lambda \cos^2 z_1); \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{N}(1 + e^2 \cos^2 \lambda \cos^2 z_2); \quad \frac{1}{R_3} = \frac{1}{N}(1 + e^2 \cos^2 \lambda \cos^2 z_3),$$

valeurs qui, introduites dans l'expression précédente, donneront:

$$\left. \begin{aligned} (A_0 - A^*) \sin A^* = \frac{1}{N^2} \left\{ \frac{b^4 + c^4 - a^4}{24\, bc} - \frac{b^2 + c^2}{6} \cos A^* + \frac{bc}{4} \right\} \\ + \frac{e^2 \cos^2 \lambda}{N^2} \left\{ \frac{b^4 \cos^2 z_2 + c^4 \cos^2 z_3 - a^4 \cos^2 z_1}{12\, bc} - \frac{b^2 \cos^2 z_2 + c^2 \cos^2 z_3}{3} \cos A^* + \frac{bc (\cos^2 z_2 + \cos^2 z_3)}{4} \right\} \end{aligned} \right\}. \tag{39}$$

Si maintenant on remarque que: $b^4 + c^4 - a^4 = (b^2 + c^2 + a^2)(b^2 + c^2 - a^2) - 2\, b^2 c^2$, la première parenthèse devient:

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{12} \cos A^* + \frac{bc}{6} = \frac{bc}{6} \sin^2 A^*.$$

Pour pouvoir réduire la seconde parenthèse, il faut se rappeler qu'on a avec une rigueur absolue:

$$a \cos (z_2 + 180° - C^*) = c \cos (z_2 + A^*) - b \cos z_2, \tag{40}$$

et, tous les termes d'un ordre plus élevé pouvant être négligés, on pourra, avec une exactitude suffisante, poser:

$$a \cos z_1 = c \cos z_3 - b \cos z_2.$$

En multipliant:

$$a^2 \cos^2 z_1 = c^2 \cos^2 z_3 + b^2 \cos^2 z_2 - 2\,bc \cos z_2 \cos z_3$$

par:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A^*,$$

il vient alors:

$$b^4 \cos^2 z_2 + c^4 \cos^2 z_3 - a^4 \cos^2 z_1 = 2\,bc \left\{ (b^2 + c^2) \cos z_2 \cos z_3 + (b^2 \cos^2 z_2 + c^2 \cos^2 z_3) \cos A^* \right\}$$
$$- b^2 c^2 \left\{ (\cos^2 z_2 + \cos^2 z_3) + 4 \cos z_2 \cos z_3 \cos A^* \right\},$$

et la parenthèse se réduit ainsi à:

$$\frac{1}{6} \left\{ (b^2 + c^2) \cos z_2 \cos z_3 - (b^2 \cos^2 z_2 + c^2 \cos^2 z_3) \cos A^* + bc (\cos^2 z_2 + \cos^2 z_3) - 2\,bc \cos z_2 \cos z_3 \cos A^* \right\}.$$

Comme $z_2 + A = z_3$ ou, avec une exactitude suffisante, $z_2 + A^* = z_3$, on a dans les premiers termes:

$$b^2 \cos z_2 (\cos (z_2 + A^*) - \cos z_2 \cos A^*) = - b^2 \cos z_2 \sin z_2 \sin A^*,$$

comme aussi:

$$c^2 \cos z_3 (\cos (z_3 - A^*) - \cos z_3 \cos A^*) = c^2 \cos z_3 \sin z_3 \sin A^*,$$

et, dans les derniers termes:

$$\cos^2 z_2 + \cos^2 z_3 = 1 + \cos (2 z_2 + A^*) \cos A^*, \text{ et } 2 \cos z_2 \cos z_3 = \cos (2 z_2 + A^*) + \cos A^*.$$

A l'aide de ces valeurs, on obtient enfin suivant (39):

$$A_0 - A^* = \frac{bc \sin A^*}{6\,N^2} + \frac{e^2 \cos^2 \lambda}{12\,N^2} \left\{ c^2 \sin 2 z_3 - b^2 \sin 2 z_2 + 2\,bc \sin A^* \right\},$$

ou, en introduisant le rayon de courbure M du méridien, qui donne: $\frac{1}{M} = \frac{1}{N} (1 + e^2 \cos^2 \lambda)$, et la surface du triangle plan $\sigma^* = \frac{1}{2}\,bc \sin A^*$:

$$A_0 - A^* = \frac{\sigma^*}{3\,NM} + \frac{e^2 \cos^2 \lambda}{12\,N^2} \left\{ c^2 \sin 2 z_3 - b^2 \sin 2 z_2 \right\}. \tag{41}$$

Pour trouver $A - A^*$ il faut encore ajouter à cette expression la valeur de $A - A_0$, qui se laisse seulement déterminer par une indication précise des courbes qui forment les côtés du triangle dont il s'agit. Si, par exemple, on joignait entre eux les points A, B et C par les lignes mentionnées dans un paragraphe précédent, lesquelles sont tangentes en A à la section normale $AA'B$ et en B à la section normale $BB'A$, on aurait $A - A_0 = 0$, et l'équation (41) donnerait alors immédiatement la valeur de $A - A^*$. Mais il est clair que cette forme du triangle est loin d'être la plus favorable. En effet, on voit facilement que le calcul le plus simple correspondra à une valeur de $A - A_0$ telle que $A - A^*$ soit réduit au premier terme de (41). L'expression est ainsi non seulement ramenée à un terme unique d'une forme très simple, mais elle acquiert en même temps une propriété d'une importance décisive, puisque la correction cherchée devient la même pour les trois angles, ou, en d'autres termes, que le théorème de LEGENDRE s'applique alors immédiatement au calcul du triangle, car bien que la mesure de la courbure, $\frac{1}{NM}$, soit différente pour les trois sommets A, B et C, cette différence, qui est multipliée par un facteur du 2e ordre, étant elle-même du 2e ordre, elle disparaît complètement dans la formule, où il est seulement question de conserver les termes ne dépassant pas le 3e ordre, et la mesure de la courbure peut alors être déterminée pour un point quelconque situé dans le triangle ou en dehors de celui-ci, lorsque la distance n'excède pas une grandeur du 1er ordre.

Conformément à ce qui précède, il faut mener les côtés du triangle de manière que l'on ait:

$$A - A_0 = \frac{e^2 \cos^2 \lambda}{12\,N^2} \left\{ b^2 \sin 2 z_2 - c^2 \sin 2 z_3 \right\}.$$

Mais c'est précisément ce résultat qu'on obtient par le choix des lignes géodésiques. En effet, en considérant l'expression de δ donnée par la formule (33) du paragraphe précédent, et en désignant par δ_2 et δ_3 les valeurs correspondant aux côtés b et c, on a évidemment: $A_0 = A + \delta_2 - \delta_3$ et, par conséquent: $A - A_0 = \delta_3 - \delta_2$, ou exactement la valeur donnée plus haut jusqu'au développement des termes du 3e ordre inclusivement.

L'excès sphéroïdique ε est alors donné par la formule:

$$\varepsilon = \frac{\sigma^*}{NM} \tag{42}$$

et c'est le tiers de cette valeur qu'il faut déduire de chacun des angles, pour avoir les angles correspondants du triangle plan construit avec les mêmes côtés.

Comme on le sait, c'est par une heureuse inspiration et non par un mûr examen de la question, que les géodésiens ont été amenés à choisir parmi toutes les formes de triangles précisément celle qui est la plus commode pour les calculs.

L'application de la formule (38) à la sphère de rayon R donne immédiatement pour le triangle sphérique:

$$A_0 = A; \quad \beta = \frac{b}{2R}; \quad \gamma = \frac{c}{2R};$$

et en même temps:

$$\mathfrak{a} = 2R\,.\mathrm{in}\left(\frac{a}{2R}\right); \quad \mathfrak{b} = 2R\sin\left(\frac{b}{2R}\right); \quad \mathfrak{c} = 2R\sin\left(\frac{c}{2R}\right);$$

ou, jusqu'aux termes du 4e ordre inclusivement:

$$\mathfrak{a} = a - \frac{a^3}{24R^2}; \quad \mathfrak{b} = b - \frac{b^3}{24R^2}; \quad \mathfrak{c} = c - \frac{c^3}{24R^2}.$$

Le développement de la formule (38) jusqu'aux termes du 3e ordre inclusivement donnera donc:

$$(A - A^*)\sin A^* = \frac{1}{R^2}\left\{\frac{b^4 + c^4 - a^4}{24\,bc} - \frac{b^2 + c^2}{6}\cos A^* + \frac{bc}{4}\right\},$$

où la parenthèse peut, de la manière indiquée plus haut, avec la plus grande facilité être réduite à:

$$\frac{bc}{6}\sin^2 A^*.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, on obtient donc:

$$A - A^* = \frac{bc\sin A^*}{6R^2} = \frac{\sigma^*}{3R^2}$$

ou le théorème connu de Legendre.

Cette manière simple de le déduire, grâce surtout à la relation qu'elle établit entre le théorème et la solution du problème général des triangles sur une surface quelconque, semble pouvoir remplacer avec avantage l'exposé qu'on trouve d'ordinaire dans les traités destinés à l'enseignement.

§ 5. Détermination des termes du 4ᵉ ordre dans les formules développées.

L'application du théorème de Legendre au calcul de triangles géodésiques quelconques mesurés directement, permet de les déterminer avec une précision telle que, dans la pratique ordinaire de la géodésie, il n'y a pas la moindre raison de désirer une exactitude encore plus grande. Mais il en est autrement lorsqu'il s'agit de grands triangles formés en joignant entre eux des points éloignés pris dans le réseau des triangles, et dont les côtés et les angles ne peuvent être déterminés qu'indirectement par la combinaison d'un grand nombre de triangles mesurés directement. Alors il pourra naturellement se présenter des cas où il sera nécessaire d'utiliser les termes de l'ordre suivant, de même aussi qu'il est clair que c'est seulement par la détermination de ces derniers qu'il deviendra possible de se faire une idée bien nette de l'exactitude de la solution ordinaire. C'est pourquoi nous continuerons le développement des formules en déterminant complètement tous les termes du 4ᵉ ordre.

Un coup d'œil jeté sur la formule (38) montre facilement qu'une détermination des termes du n^e ordre de $A_0 - A^*$ doit exiger pour $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ un développement poussé jusqu'aux termes de l'ordre $n+1$, mais pour β et γ, seulement jusqu'à ceux de l'ordre $n-1$, tous les deux inclusivement. Nous commencerons donc par développer ces grandeurs en séries respectivement jusqu'aux termes du 5ᵉ et du 3ᵉ ordre, en substituant partout la longueur de la section normale à celle de la ligne géodésique, la différence entre ces longueurs n'apparaissant que dans le 7ᵉ ordre. On est ainsi ramené à ce simple problème: dans une courbe plane donnée, trouver la corde r et l'angle v entre celle-ci et la tangente à l'origine, développés à l'aide de la longueur d'arc correspondante s.

Pour une courbe plane quelconque exprimée par les coordonnées polaires r et v, dont la première est considérée comme variable indépendante, on a l'équation différentielle:

$$s'^2 = 1 + r^2 v'^2,$$

et, en la différentiant:

$$s's'' = r v'^2 + r^2 v' v'',$$

$$s's''' + s''^2 = v'^2 + 4 r v' v'' + r^2 v''^2 + r^2 v' v'''.$$

Mais pour l'origine on a en même temps:

$$r_0 = 0\,; \quad v_0 = 0\,; \quad s_0 = 0\,;$$

et, par conséquent, les équations différentielles ci-dessus donneront successivement:

$$s_0' = 1\,; \quad s_0'' = 0\,; \quad s_0''' = v_0'^2.$$

En se rappelant maintenant que la formule générale du rayon de courbure R dans le système polaire, lorsque r est considéré comme variable indépendante, est la suivante:

$$R = \frac{(1 + r^2 v'^2)^{\frac{3}{2}}}{2 v' + r v'' + r^2 v'^3},$$

on aura pour l'origine: $R = \dfrac{1}{2 v_0'}$, et la série de s, exprimée en fonction de r, commencera ainsi pour toutes les courbes avec les termes:

$$s = r + \frac{r^3}{24 R^2}.$$

Pour déterminer s_0^{IV} og s_0^{V}, il faut encore développer les équations différentielles du 4[e] et du 5[e] ordre, mais il est clair qu'on peut négliger dans la première tous les termes avec le facteur r^2 et, dans la seconde, tous ceux avec le facteur r, puisque cela ne change en rien le résultat provenant de la substitution de $r_0 = 0$. On obtient ainsi:

$$s's^{IV} + 3\, s''s''' = 6\, v'v'' + 6\, rv''^2 + 6\, rv'v''' + \cdots$$

$$s's^{V} + 4\, s''s^{IV} + 3\, s'''^2 = 12\, v'v''' + 12\, v''^2 + \cdots$$

et par suite:

$$s_0^{IV} = 6\, v_0'v_0''; \quad s_0^{V} = 12\, v_0'v_0''' + 12\, v_0''^2 - 3\, v_0'^4.$$

Pour déterminer les valeurs de v_0'' et de v_0''' il faut connaître l'équation de la courbe, qui, pour la section elliptique que nous considérons ici sur le sphéroïde, est:

$$r\,(1 - e_0^2 \sin^2 (l + v)) - 2\, N\,(1 - e_0^2) \sin v = 0, \tag{43}$$

où nous désignons par e_0^2 et l le carré de l'excentricité et l'angle que la normale N à l'origine fait avec le grand axe de l'ellipse provenant de la section, par conséquent les mêmes grandeurs qui, dans la section méridienne, sont désignées par e^2 et λ.

En différentiant (43) et en négligeant encore dans la dernière équation ainsi obtenue les termes qui disparaissent par la substitution de $r_0 = 0$ et $v_0 = 0$, il vient:

$$1 - e_0^2 \sin^2 (l + v) - re_0^2 \sin 2\,(l + v) \cdot v' - 2\, N\,(1 - e_0^2) \cos v \cdot v' = 0;$$

$$-2\, e_0^2 \sin 2\,(l + v) \cdot v' - 2\, re_0^2 \cos 2\,(l + v) \cdot v'^2 - re_0^2 \sin 2\,(l + v) \cdot v'' + 2\, N\,(1 - e_0^2) \sin v \cdot v'^2 - 2\, N\,(1 - e_0^2) \cos v \cdot v'' = 0;$$

$$-6\, e_0^2 \cos 2\,(l + v) \cdot v'^2 - 3\, e_0^2 \sin 2\,(l + v) \cdot v'' + \cdots + 2\, N\,(1 - e_0^2) \cos v \cdot v'^3 - 2\, N\,(1 - e_0^2) \cos v \cdot v''' + \cdots = 0;$$

et ces équations donnent successivement:

$$v_0' = \frac{1 - e_0^2 \sin^2 l}{2\, N\,(1 - e_0^2)} = \frac{1}{2\, R};$$

$$v_0'' = -\frac{e_0^2 \sin 2\, l}{2\, RN\,(1 - e_0^2)};$$

$$v_0''' = \frac{1}{8\, R^3} - \frac{3\, e_0^2 \cos 2\, l}{4\, R^2\, N\,(1 - e_0^2)} + \frac{3\, e_0^4 \sin^2 (2\, l)}{4\, RN^2\,(1 - e_0^2)^2}.$$

Par suite, le développement en série de s jusqu'aux termes du 5[e] ordre inclusivement, sera:

$$s = r + \frac{r^3}{24\, R^2} - \frac{e_0^2 \sin 2\, l \cdot r^4}{16\, R^2\, N\,(1 - e_0^2)} + \frac{3\, r^5}{640\, R^4},$$

e_0^2, qui est toujours plus petit que e^2, devant être considéré comme une grandeur du 1[er] ordre.

Mais le rayon de courbure R_s à l'extrémité de l'arc d'ellipse s est, jusqu'aux termes du 2[e] ordre inclusivement, déterminé par l'expression:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R} \left\{ 1 - \frac{3}{2}\, e_0^2 \sin 2\, l \cdot \frac{s}{R} \right\},$$

et, si l'on désigne par R_m le rayon de courbure au milieu de l'arc, on aura beaucoup plus simplement et avec toute l'exactitude voulue:

$$s = r + \frac{r^3}{24\, R_m^2} + \frac{3\, r^5}{640\, R_m^4} \tag{44}$$

d'où résulte avec la même exactitude:

$$r = s \left\{ 1 - \frac{s_1^2}{24} + \frac{s_1^4}{1920} \right\} \tag{45}$$

s_1 désignant le quotient $\dfrac{s}{R_m}$.

La série de v:

$$v = v_0 + v_0' r + \frac{1}{2} v_0'' r^2 + \frac{1}{6} v_0''' r^3 + \cdots$$

donne en outre jusqu'aux termes du 3^e ordre inclusivement:

$$v = \frac{r}{2R} - \frac{e_0^2 \sin 2l \cdot r^2}{4R^2} + \frac{r^3}{48 R^3},$$

valeur qui, à l'aide de la formule (45), devient:

$$v = \frac{s}{2R} - \frac{e_0^2 \sin 2l \cdot s^2}{4R^2},$$

ou plus simplement:

$$v = \frac{1}{2} s_2, \tag{46}$$

s_2 désignant le quotient de s par le rayon de courbure à l'extrémité du premier tiers de l'arc.

Après ces préliminaires, nous passerons maintenant au développement de $A_0 - A^*$, et remarquerons d'abord que la formule (38) donne jusqu'aux termes du 4^e ordre inclusivement:

$$(A_0 - A^*) \sin A^* = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2}{2\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \left\{ 1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} + \frac{5\beta^4 + 6\beta^2\gamma^2 + 5\gamma^4}{24} \right\}$$
$$+ \beta\gamma \left\{ 1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{3} \right\} - \frac{b^2 c^2 \sin^2 A^* \cos A^*}{72 N^2 M^2},$$

où nous avons éliminé $(A_0 - A^*)^2$ dans

$$\cos A_0 = \cos\left\{ (A_0 - A^*) + A^* \right\} = \left(1 - \frac{1}{2}(A_0 - A^*)^2\right) \cos A^* - (A_0 - A^*) \sin A^*,$$

à l'aide de la valeur trouvée dans le paragraphe précédent.

Conformément à (45) et (46), il faut maintenant introduire dans ce développement les valeurs:

$$\mathfrak{a} = a\left(1 - \frac{a_1^2}{24} + \frac{a_1^4}{1920}\right), \text{ par conséquent: } \mathfrak{a}^2 = a^2\left(1 - \frac{a_1^2}{12} + \frac{a_1^4}{360}\right);$$
$$\mathfrak{b} = b\left(1 - \frac{b_1^2}{24} + \frac{b_1^4}{1920}\right), \qquad \text{do.} \qquad \mathfrak{b}^2 = b^2\left(1 - \frac{b_1^2}{12} + \frac{b_1^4}{360}\right);$$
$$\mathfrak{c} = c\left(1 - \frac{c_1^2}{24} + \frac{c_1^4}{1920}\right), \qquad \text{do.} \qquad \mathfrak{c}^2 = c^2\left(1 - \frac{c_1^2}{12} + \frac{c_1^4}{360}\right);$$

et:

$$\beta = \frac{1}{2} b_2; \quad \gamma = \frac{1}{2} c_2.$$

Pour abréger autant que possible le calcul, qui, d'après la nature compliquée du problème, sera nécessairement un peu long, il faut toujours observer rigoureusement le degré d'exactitude dont on a besoin, et rejeter immédiatement tout ce qui dépasse visiblement cette limite. Il est clair, par exemple, que, dans tous les termes du 4^e ordre, on pourra à volonté permuter les divers rayons de courbure aussi bien entre eux qu'avec les grandeurs N et M, d'où il suit qu'on obtient sans difficulté:

$$\left.\begin{aligned} (A_0 - A^*) \sin A^* = \frac{b^2 b_1^2 + c^2 c_1^2 - a^2 a_1^2}{24\, bc} - \frac{b_1^2 + c_1^2}{24} \cos A^* + \frac{b_2 c_2}{4} - \frac{b_2^2 + c_2^2}{8} \cos A^* \\ + \frac{1}{N^2 M^2} \left\{ \frac{(b^2 + c^2)(b^4 + c^4 - a^4)}{144\, bc} - \frac{b^6 + c^6 - a^6}{720\, bc} + \frac{bc\,(b^2 + c^2)}{48} - \frac{7 b^4 + 10 b^2 c^2 + 7 c^4}{360} \cos A^* - \frac{b^2 c^2 \sin^2 A^* \cos A^*}{72} \right\} \end{aligned}\right\}. \tag{47}$$

Les termes du 4^e^ ordre sont facilement réductibles en remplaçant a^2 par sa valeur $(b^2+c^2) - 2bc\cos A^*$, ce qui donne:

$$\frac{(b^2+c^2)(b^4+c^4-a^4)}{144\,bc} = \frac{-bc(b^2+c^2)+2(b^2+c^2)^2\cos A^* - 2\,bc(b^2+c^2)\cos^2 A^*}{72};$$

$$-\frac{b^6+c^6-a^6}{720\,bc} = \frac{3\,bc(b^2+c^2) - 6(b^2+c^2)^2\cos A^* + 12\,bc(b^2+c^2)\cos^2 A^* - 8\,b^2c^2\cos^3 A^*}{720};$$

et, comme on a également:

$$-\frac{7\,b^4+10\,b^2c^2+7\,c^4}{360}\cos A^* = \frac{-7(b^2+c^2)^2\cos A^* + 4\,b^2c^2\cos A^*}{360},$$

tous les termes de cet ordre peuvent être réduits à:

$$\frac{1}{N^2M^2}\left\{\frac{8\,bc(b^2+c^2)\sin^2 A^* - 2\,b^2c^2\sin^2 A^*\cos A^*}{720}\right\} = \frac{bc\sin^2 A^*}{720\,N^2M^2}(7\,b^2+7\,c^2+a^2). \tag{48}$$

Il est plus difficile de trouver la transformation la plus convenable des termes du 2^e^ ordre, qui, par l'introduction des rayons de courbure, donnent naissance à un grand nombre de termes du 3^e^ et du 4^e^ ordre. Comme évidemment il sera et nécessaire et suffisant que les expressions de ces rayons de courbure soient poussées jusqu'aux termes du 2^e^ ordre inclusivement, et comme à l'aide de la formule:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{N}\left\{1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\lambda\cos^2 z + \frac{3}{2}e^2\sin 2\lambda\cos z\cdot\frac{s}{N}\right\},$$

on détermine précisément avec la même exactitude, sur la surface sphéroïdique de la terre, le rayon de courbure R_s à l'extrémité de l'arc d'ellipse s qui part du point A sous l'azimut z, on aura, en observant que l'azimut de la section normale peut partout, dans ces expressions, être considéré comme coïncidant avec celui du côté correspondant du triangle:

$$b_1 = \frac{b}{N}\left\{1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\lambda\cos^2 z_2 + \frac{e^2\sin 2\lambda}{4\,N}\cdot 3\,b\cos z_2\right\};$$

$$c_1 = \frac{c}{N}\left\{1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\lambda\cos^2 z_3 + \frac{e^2\sin 2\lambda}{4\,N}\cdot 3\,c\cos z_3\right\};$$

$$b_2 = \frac{b}{N}\left\{1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\lambda\cos^2 z_2 + \frac{e^2\sin 2\lambda}{2\,N}\cdot b\cos z_2\right\};$$

$$c_2 = \frac{c}{N}\left\{1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\lambda\cos^2 z_3 + \frac{e^2\sin 2\lambda}{2\,N}\cdot c\cos z_3\right\};$$

et également, en désignant par N_1 et λ_1 la normale au point C et la latitude de ce point:

$$a_1 = \frac{a}{N_1}\left\{1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\lambda_1\cos^2 z_1 + \frac{e^2\sin 2\lambda}{4\,N}\cdot 3\,a\cos z_1\right\};$$

où nous pouvons cependant, dans le dernier terme, remplacer λ_1 et N_1 par λ et N.

Mais, dans cette expression de a_1 on peut éliminer N_1 à l'aide de l'équation:

$$\frac{1}{N_1} = \frac{1}{N}\left\{1+\frac{e^2\sin 2\lambda}{2\,N}\cdot b\cos z_2\right\};$$

en outre, nous réduirons, dans le facteur $\cos^2\lambda_1\cos^2 z_1$, la latitude λ_1 à λ, et, conformément à l'équation:

$$z_1 = z_2 + 180° - \zeta - C,$$

mettrons pour z_1: $(z_1+\zeta) = z_2 + 180° - C$, ce qui transforme $\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\lambda_1\cos^2 z_1$ en: $\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\lambda$ $\cos^2(z_1+\zeta) + \frac{e^2\sin 2\lambda}{N\cdot}\cos(z_2 - C)\cos C\cdot b$. De plus, il sera avantageux, dans ce qui suit, de poser:

$$\cos(z_2 - C)\cos C = \cos^2 C\cos z_2 + \sin C\cos C\sin z_2 = \cos z_2 + \sin C\sin(z_2 - C),$$

et alors on obtient enfin:

$$a_1 = \frac{a}{N}\left\{1 + \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\lambda\cos^2(z_1+\zeta) + \frac{e^2\sin 2\lambda}{4N}(3a\cos z_1 + 6b\cos z_2 + 4b\sin C\sin(z_2 - C))\right\}.$$

En introduisant les valeurs développées dans la partie mentionnée ci-dessus de la formule, on aura les termes du 2^e^ ordre:

$$\frac{1}{N^2}\left\{\frac{b^4+c^4-a^4}{24\,bc} - \frac{b^2+c^2}{6}\cos A^* + \frac{bc}{4}\right\} = \frac{bc\sin^2 A^*}{6N^2}, \tag{49}$$

et les termes du 3^e^ ordre:

$$\frac{e^2\cos^2\lambda}{N^2(1-e^2)}\left\{\frac{b^4\cos^2 z_2 + c^4\cos^2 z_3 - a^4\cos^2(z_1+\zeta)}{12\,bc} - \frac{b^2\cos^2 z_2 + c^2\cos^2 z_3}{3}\cos A^* + \frac{bc(\cos^2 z_2 + \cos^2 z_3)}{4}\right\};$$

et enfin les termes suivants du 4^e^ ordre:

$$\frac{e^2\sin 2\lambda}{N^3}\left\{\frac{3b^5\cos z_2 + 3c^5\cos z_3 - a^4(3a\cos z_1 + 6b\cos z_2 + 4b\sin C\sin(z_2 - C))}{48\,bc}\right.$$
$$\left. - \frac{3(b^3\cos z_2 + c^3\cos z_3)}{16}\cos A^* + \frac{bc(b\cos z_2 + c\cos z_3)}{8}\right\}$$
$$+ \frac{e^4\cos^4\lambda}{N^2}\left\{\frac{b^4\cos^4 z_2 + c^4\cos^4 z_3 - a^4\cos^4(z_1+\zeta)}{24\,bc} - \frac{b^2\cos^4 z_2 + c^2\cos^4 z_3}{6}\cos A^* + \frac{bc\cos^2 z_2\cos^2 z_3}{4}\right\}.$$

Pour pouvoir réduire les termes du 3^e^ ordre, il faut remarquer que l'équation (40) du paragraphe précédent donnera avec une exactitude suffisante:

$$a\cos(z_1+\zeta) = c\cos z_3 - b\cos z_2,$$

ce qui montre tout de suite qu'on pourra, absolument de la même manière qu'auparavant, réduire ces termes à:

$$\frac{e^2\cos^2\lambda\sin A^*}{6N^2(1-e^2)}\left\{\frac{c^2\sin 2z_3 - b^2\sin 2z_2}{2} + bc\sin A^*\right\}. \tag{50}$$

Si l'on multiplie ensuite:

$$a^4 = b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 4bc(b^2+c^2)\cos A^* + 4b^2c^2\cos^2 A^*$$

par: $3a\cos z_1 + 6b\cos z_2 + 4b\sin C\sin(z_2 - C) = 3b\cos z_2 + 3c\cos z_3 + 4b\sin C\sin(z_2 - C)$, la réduction des termes du 4^e^ ordre donnera pour le numérateur, dans le premier terme de la première parenthèse, l'expression:

$$-3bc(c^3\cos z_2 + b^3\cos z_3) - 6b^2c^2(c\cos z_3 + b\cos z_2) + 12bc(b^2+c^2)(c\cos z_3 + b\cos z_2)\cos A^*$$
$$-12b^2c^2(b\cos z_2 + c\cos z_3)\cos^2 A^* - 4(b^2+c^2-2bc\cos A^*)^2\cdot b\sin C\sin(z_2 - C),$$

où l'on peut en outre, pour $b\sin C\sin(z_2 - C)$, poser:

$$\frac{bc\sin A^*\sin(z_2 - C)}{a} = \frac{bc\sin A^*(b\sin z_2 - c\sin z_3)}{b^2+c^2-2bc\cos A^*}.$$

Cette parenthèse devient par suite:

$$-\frac{c^3\cos z_2+b^3\cos z_3}{16}+\frac{b^3\cos z_2+c^3\cos z_3}{16}\cos A^*+\frac{bc\,(c\cos z_2+b\cos z_3)}{4}\cos A^*$$
$$-\frac{bc\,(b\cos z_2+c\cos z_3)}{4}\cos^2 A^*-\frac{(b^2+c^2-2\,bc\cos A^*)\sin A^*(b\sin z_2-c\sin z_3)}{12},$$

qui se réduit de nouveau à:

$$\left\{\frac{b^3\sin z_2-c^3\sin z_3}{16}+\frac{c\sin z_3-b\sin z_2}{12}bc\cos A^*-\frac{(b^2+c^2)\,(b\sin z_2-c\sin z_3)}{12}\right\}\sin A^*,$$

et enfin à:

$$\left\{\frac{c^3\sin z_3-b^3\sin z_2}{48}\sin A^*+\frac{bc\,(b\cos z_2+c\cos z_3)}{12}\sin^2 A^*\right\}. \tag{51}$$

Il reste encore la dernière parenthèse. En y remplaçant $a^4\cos^4(z_1+\zeta)$ par sa valeur:

$$b^4\cos^4 z_2+c^4\cos^4 z_3+6\,b^2c^2\cos^2 z_2\cos^2 z_3-4\,bc\,(b^2\cos^2 z_2+c^2\cos^2 z_3)\cos z_2\cos z_3;$$

elle se réduit à:

$$\frac{1}{6}\left\{(b^2\cos^2 z_2+c^2\cos^2 z_3)\cos z_2\cos z_3-(b^2\cos^4 z_2+c^2\cos^4 z_3)\cos A^*\right\};$$

mais:

$$\cos^3 z_2\cos z_3-\cos^4 z_2\cos A^*=-\cos^3 z_2\sin z_2\sin A^*,$$
$$\cos^3 z_3\cos z_2-\cos^4 z_3\cos A^*=+\cos^3 z_3\sin z_3\sin A^*,$$

et cette dernière parenthèse devient donc:

$$\left\{\frac{c^2\cos^2 z_3\sin 2\,z_3-b^2\cos^2 z_2\sin 2\,z_2}{12}\right\}\sin A^*. \tag{52}$$

Le développement se trouve ainsi terminé, et, conformément à (48), (49), (50), (51), (52), la formule (47) donne maintenant, en y remplaçant $\frac{1}{N}\left\{1+\frac{e^2\cos^2\lambda}{1-e^2}\right\}$ par $\frac{1}{M}$, l'expression suivante pour A_0-A^*:

$$\left.\begin{aligned}A_0-A^* &= \frac{bc\sin A^*}{6\,NM}\left\{1+e^2\sin 2\,\lambda\cdot\frac{b\cos z_2+c\cos z_3}{2\,N}+\frac{7\,b^2+7\,c^2+a^2}{120\,NM}\right\}\\ &+\frac{e^2\cos^2\lambda}{12\,N^2(1-e^2)}(c^2\sin 2\,z_3-b^2\sin 2\,z_2)+\frac{e^2\sin 2\,\lambda}{48\,N^3}(c^3\sin z_3-b^3\sin z_2)\\ &+\frac{e^4\cos^4\lambda}{12\,N^2}(c^2\cos^2 z_3\sin 2\,z_3-b^2\cos^2 z_2\sin 2\,z_2)\end{aligned}\right\}. \tag{53}$$

Pour déterminer $A-A_0$, nous éliminerons R dans la formule (33) à l'aide de l'équation:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{N}\left\{1+e^2\cos^2\lambda\cos^2 z\right\},$$

et on a alors:

$$\left.\begin{aligned}A-A_0=\delta_3-\delta_2 &= \frac{e^2\cos^2\lambda}{12\,N^2(1-e^2)}(b^2\sin 2\,z_2-c^2\sin 2\,z_3)+\frac{e^2\sin 2\,\lambda}{48\,N^3}(b^3\sin z_2-c^3\sin z_3)\\ &+\frac{e^4\cos^4\lambda}{12\,N^2}(b^2\cos^2 z_2\sin 2\,z_2-c^2\cos^2 z_3\sin 2\,z_3)\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

valeur qui montre encore d'une manière frappante les avantages qu'ont les triangles géodésiques sur toutes les autres jonctions entre trois points du sphéroïde, puisque c'est précisément par l'emploi des lignes géodésiques qu'on fait disparaître la plus grande partie des termes de $A_0 - A^*$. L'addition de (53) et de (54) donne en effet:

$$A - A^* = \frac{\sigma^*}{3\,NM}\left\{1 + e^2 \sin 2\lambda \cdot \frac{b\cos z_2 + c\cos z_3}{2\,N} + \frac{7\,b^2 + 7\,c^2 + a^2}{120\,NM}\right\}.$$

Si l'on désigne avec Gauss les mesures de la courbure en A, B et C par α, β et γ, notations qu'il ne faut pas confondre avec les mêmes lettres employées plus haut pour désigner d'autres grandeurs, on aura:

$$\alpha = \frac{1}{NM}; \quad \beta = \frac{1}{NM}\left(1 + 2\,e^2 \sin 2\lambda \cdot \frac{b\cos z_2}{N}\right); \quad \gamma = \frac{1}{NM}\left(1 + 2\,e^2 \sin 2\lambda \cdot \frac{c\cos z_3}{N}\right),$$

valeurs qui, introduites dans l'expression de $A - A^*$, donnent:

$$A - A^* = \frac{\sigma^*}{12}\left\{2\,\alpha + \beta + \gamma + \frac{7\,b^2 + 7\,c^2 + a^2}{30\,N^2M^2}\right\};$$

et, en permutant les lettres, on obtiendra de la même manière:

$$B - B^* = \frac{\sigma^*}{12}\left\{\alpha + 2\,\beta + \gamma + \frac{b^2 + 7\,c^2 + 7\,a^2}{30\,N^2M^2}\right\};$$

$$C - C^* = \frac{\sigma^*}{12}\left\{\alpha + \beta + 2\,\gamma + \frac{7\,b^2 + c^2 + 7\,a^2}{30\,N^2M^2}\right\}.$$

L'addition de ces trois expressions donne pour l'excès sphéroïdique:

$$\varepsilon = \frac{\sigma^*}{3}\left\{\alpha + \beta + \gamma + \frac{b^2 + c^2 + a^2}{8\,N^2M^2}\right\},$$

ou, en introduisant les moyennes:

$$\mu = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}; \quad m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3};$$

$$\varepsilon = \sigma^*\mu\left\{1 + \frac{1}{8}\mu\,m^2\right\} \tag{55}$$

ce qui conduit enfin à représenter la solution du problème sous la forme élégante qui suit:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\sigma^*}{12}(\alpha - \mu) + \frac{\sigma^*\mu^2}{60}(m^2 - a^2) \\ B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\sigma^*}{12}(\beta - \mu) + \frac{\sigma^*\mu^2}{60}(m^2 - b^2) \\ C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\sigma^*}{12}(\gamma - \mu) + \frac{\sigma^*\mu^2}{60}(m^2 - c^2) \end{aligned}\right\}. \tag{56}$$

Ces formules montrent clairement l'erreur qui résulte de l'emploi du théorème de Legendre. Elle est composée de deux parties qui sont toutes deux de petites grandeurs du 4^e ordre, et dont la première provient exclusivement de la différence entre les mesures de la courbure pour les trois sommets du triangle, tandis que la dernière n'est due qu'à la différence entre les longueurs des côtés eux-mêmes. Sur la sphère, où l'on a $\mu = \alpha = \beta = \gamma$, la première de ces parties disparaît complètement, et il ne reste que la dernière, qui demeure invariable. Mais, sur le sphéroïde aussi bien que sur la sphère, celle-ci s'évanouit pour le triangle équilatéral, où $m^2 = a^2 = b^2 = c^2$. D'ailleurs il est facile de voir que l'erreur totale, pour tous les triangles mesurés directement, doit, dans la pratique ordinaire de la géodésie, être toujours une grandeur absolument négligeable, puisque, en Danemark par exemple, même pour des côtés de triangles mesurant plus de 20 milles danois, et dans les cas les plus défavorables relativement à la forme et à la situation du triangle, elle ne dépassera jamais pour aucun des angles $\frac{1}{1000}$ de seconde d'arc.

3e Cahier: Détermination du sphéroïde terrestre par la combinaison des mesures géodésiques avec les observations astronomiques

§ 1. Remarques préliminaires.

Nous nous proposons, dans ce cahier, de montrer comment les résultats des observations astronomiques, par leur combinaison avec les résultats correspondants des mesures géodésiques, peuvent servir à déterminer la grandeur et la forme du sphéroïde terrestre. Mais avant d'aborder ce problème, nous présenterons quelques remarques préliminaires qui pourront contribuer à mieux préciser tant la nature du problème lui-même que le point de vue où doit, pour le résoudre, se placer la géodésie moderne.

1.

C'est la surface mathématique de la terre, ou, en d'autres termes, la surface de niveau correspondant à la hauteur moyenne de la mer, qui constitue l'objet des recherches de la haute géodésie. Cette surface peut bien, en général, être considérée comme limitant un ellipsoïde de révolution, le *sphéroïde terrestre*, dont l'axe de rotation est parallèle à l'axe du monde, mais il est cependant évident que la forme rigoureusement ellipsoïdale, ou, comme nous l'appellerons, *sphéroïdique*, ne saurait être réalisée qu'approximativement. Même si la distribution des densités, dans l'intérieur inconnu de la terre, répondait entièrement aux suppositions sur lesquelles repose l'hypothèse de la terre sphéroïdique, les verticales qui coupent normalement la surface mathématique seraient cependant partout influencées par les formes irrégulières de l'écorce terrestre et par les variations arbitraires de densité dans ses différentes couches. Il en résulte nécessairement que des irrégularités correspondantes doivent caractériser partout la surface de niveau déterminée par ces verticales, surface qui, par conséquent, doit limiter un corps irrégulier, auquel, en nous servant d'une dénomination introduite par plusieurs géodésiens allemands, nous donnerons le nom de *géoïde*. Si le sphéroïde, avec la direction donnée de son axe de rotation, est maintenu comme le type *régulier* qui se prête le mieux à représenter le géoïde *irrégulier*, il faudra donc se rappeler que la surface du géoïde décrit partout une infinité d'ondulations, qui tantôt s'élèvent comme des monticules au-dessus du sphéroïde, et tantôt s'abaissent comme des vallées qui peuvent pénétrer plus ou moins dans son intérieur, la distance entre les deux surfaces, d'après toutes les observations géodésiques recueillies jusqu'ici, devant toujours être considérée comme extrêmement petite, puisqu'elle ne varie le plus souvent qu'entre quelques pouces et quelques pieds.[1]) Les mesures géodésiques et astronomiques exécutées à la surface physique de la terre se rapportent toujours aux verticales et, par conséquent, directement au géoïde; mais, comme il est impossible de prendre une surface irrégulière et inconnue pour base du calcul du réseau des triangles, c'est une nécessité absolue de réduire toutes ces mesures au sphéroïde. La première question à résoudre est donc celle de la méthode à suivre pour opérer ces réductions.

[1]) Nous ajouterons, pour éviter toute méprise, que les rayons de courbure du géoïde se dirigent toujours, même dans les vallées, vers l'intérieur de la terre.

2.

Le calcul de ces réductions se divise en trois sections, puisqu'il doit comprendre aussi bien la mesure des angles que celle des bases et des observations astronomiques. Lorsque tous les points A, B, C, $D \cdots$ employés dans les mesures à la surface physique de la terre, sont projetés par des normales sphéroïdiques sur le sphéroïde lui-même en des points A', B', C', $D' \cdots$, il faut d'abord faire voir comment les angles que font entre eux, à une station quelconque, A, les plans verticaux menés par différents points limitrophes B, C, $D \cdots$, peuvent être convertis en angles compris entre les plans normaux sphéroïdiques qui renferment la normale AA' et les projections B', C', $D' \cdots$. Il est évident que les réductions ont ici une double origine, puisqu'elles proviennent en partie de la circonstance que la verticale en A fait avec la normale AA' un petit angle u, la déviation dite de la verticale ou, plus simplement, la *déviation verticale*, en partie de ce qu'on a visé les points B, C, $D \cdots$ au lieu de leurs projections B', C', $D' \cdots$. Mais nous avons déjà traité ces deux réductions dans le 1er cahier, § 1, et prouvé qu'elles se réduisent en général à de si petites fractions de seconde qu'on peut complètement les négliger. Ainsi, lorsque les géodésiens, sans tenir compte de ces réductions et souvent tacitement, regardent les mesures des angles comme prises sur le sphéroïde lui-même, on ne saurait dire que cette manière de voir entraîne aucune erreur véritable.

3.

La réduction au sphéroïde des bases mesurées ne présentera pas la moindre difficulté. Un nivellement géométrique qui détermine la hauteur d'une base au-dessus de la surface de la mer ne pourra donner, il est vrai, que sa distance au géoïde, mais si l'on maintient l'hypothèse de la coïncidence très approchée du géoïde et du sphéroïde, et qu'on se rappelle en même temps que la hauteur cherchée figure dans le coefficient de réduction divisé par un des rayons de courbure du sphéroïde, l'inexactitude provenant de la substitution de la distance verticale au géoïde à la distance normale au sphéroïde, aura tout aussi peu d'importance que l'incertitude qui peut s'attacher au zéro du nivellement, point qui doit coïncider exactement avec la hauteur moyenne de la mer. Mais cette manière de voir devient naturellement inexacte lorsque le géoïde est supposé pouvoir s'écarter du sphéroïde d'une distance relativement grande, et comme c'est l'opinion d'un assez grand nombre de géodésiens, nous examinerons de plus près cette hypothèse.

4.

On semble supposer tacitement, comme chose extrêmement plausible, qu'une coïncidence très approchée du géoïde et du sphéroïde devrait nécessairement exiger une suppression des irrégularités *visibles* de la terre, un enlèvement des pays situés au-dessus de la surface de niveau et un remplissage des mers avec une matière de la même densité que l'écorce solide du globe. Si maintenant l'on se représente le passage de cette terre *idéale* à la terre véritable, où de grandes étendues de pays avec de hautes chaînes de montagnes s'élèvent au-dessus des mers, tandis que celles-ci remplissent de vastes dépressions avec une masse liquide d'une densité moindre, il deviendra évident que la surface de niveau de la mer doit, sur les continents, s'élever bien au-dessus du sphéroïde, mais, sur les océans, s'abaisser encore plus profondément au-dessous. L'image du géoïde qui en résulte sera nettement caractérisée si on se le figure comme reproduisant, à une échelle fort réduite, les hauteurs des continents et les profondeurs des mers par des élévations et des dépressions ondulées très étendues, dont les premières, au moins dans quelques endroits, doivent, d'après une évaluation approximative, avoir une altitude de plus de 600 pieds. Pour compléter l'image, il faut seulement encore ajouter que, sur ces grandes ondulations, les irrégularités d'une nature plus locale produisent encore une série alternante et ininterrompue de petites ondulations sans nombre et relativement insignifiantes. Il est facile de voir maintenant que, le plus souvent, ce sont seulement ces petites ondulations qui se montrent lorsque, pour déterminer le sphéroïde qui, dans l'extension donnée aux mesures, se rapproche le plus du géoïde, on se sert d'un réseau de triangles isolé qui ne couvre qu'une partie relativement peu étendue de la surface terrestre; et en même temps il faut se rappeler que le sphéroïde ainsi obtenu ne pourra, en général, que reproduire la forme d'une des grandes ondulations mentionnées ci-dessus. Toute tentative pour déterminer le sphéroïde terrestre lui-même par une combinaison de plusieurs de ces systèmes isolés de triangles, doit donc être regardée comme douteuse et aboutira facilement à des résultats complètement illusoires. Pour pouvoir réduire ici les mesures au véritable sphéroïde terrestre, il faudrait non seulement connaître les distances entre ce dernier et le géoïde, mais aussi s'affranchir de l'influence des déviations verticales dues aux grandes ondulations, déviations qui, sur de vastes étendues, se traduiront sous forme d'erreurs systématiques plus ou moins constantes.

Mais l'hypothèse qui précède soulève des objections auxquelles nous croyons devoir attribuer une valeur décisive. D'abord on peut faire observer que les déterminations du géoïde qui sont exclusivement basées sur des considérations théoriques doivent être regardées comme extrêmement douteuses. Elles s'appuient nécessairement, d'une manière plus ou moins cachée, sur des hypothèses relatives à la distribution de la masse dans l'intérieur du globe, qui ne peuvent guère prétendre à beaucoup de certitude. Dans le cas actuel, par exemple, il est tout à fait arbitraire de supposer que la distribution de la masse dans la terre idéale définie ci-dessus ferait coïncider le géoïde avec le sphéroïde. On peut bien plutôt affirmer qu'elle produirait au contraire le géoïde décrit plus haut qui s'en éloigne beaucoup, seulement avec la différence que les élévations et les dépressions des grandes ondulations sont remplacées partout par des dépressions et des élévations correspondantes. Il en résulte aussi que, dans ces conditions, ce sont précisément les continents et les mers de la terre réelle qui aplanissent les grandes ondulations et produisent le rapprochement intime entre le géoïde et le sphéroïde. On est en effet autorisé à tirer ces conclusions si l'on adopte l'hypothèse, en soi assez plausible, à laquelle M. Pratt a été conduit par une étude approfondie de toutes les mesures indiennes. Comme on sait, M. Pratt suppose que les élévations et les dépressions des continents et des mers sont dues à une contraction inégale de l'écorce terrestre pendant son passage de l'état fluide ou demi-fluide à l'état solide. Il s'ensuit de là que la densité sous les montagnes et les hauts plateaux doit être bien moindre, mais, sous les mers, bien plus grande que la densité moyenne, et cela de manière que, partout sur la terre, les masses réunies dans chacune des colonnes verticales de l'écorce terrestre aient à peu près la même grandeur. Les irrégularités ne consistent plus alors qu'en déplacements plus ou moins grands dans le sens radial de parties de ces masses, et il est pour ainsi dire évident, comme aussi facile à démontrer par un simple calcul, que de pareils déplacements n'apporteront dans la surface de niveau des mers que des changements relativement tout à fait insignifiants. Et si l'on reste encore dans le doute à l'égard de cette hypothèse, qui d'ailleurs est confirmée par toutes les mesures entreprises dans l'Inde, nous maintiendrons en tout cas que ce ne peut être qu'à l'expérience qu'il appartient de dire le dernier mot sur la question dont il s'agit. Avant qu'on puisse exiger l'adoption de la théorie du géoïde qui s'écarte beaucoup du sphéroïde, il faut d'abord prouver que les divers sphéroïdes qui reproduisent le mieux les parties de moindre étendue de la surface de la terre, par conséquent les grandes ondulations mentionnées plus haut, diffèrent beaucoup entre eux, et que le sphéroïde terrestre qui résulte de la combinaison de toutes les mesures exécutées de l'équateur aux pôles, ne peut pas du tout se concilier avec ces divers sphéroïdes, parce qu'il implique des déviations verticales bien plus fortes, lesquelles, pour chacune des grandes ondulations, doivent apparaître avec un caractère systématique très marqué. Mais tant s'en faut que les observations dont on dispose autorisent cette manière de voir, qu'elle est au contraire en opposition marquée avec toutes les mesures entreprises jusqu'ici. Le travail le plus complet et le plus authentique que nous possédons sur cette matière est certainement dû au colonel Clarke, géodésien anglais, qui, pendant plusieurs années, s'est occupé de vastes recherches sur la grandeur et la forme du sphéroïde terrestre. Aussi en nous référant, pour ce qui regarde une étude plus détaillée, aux travaux d'un haut intérêt publiés par M. Clarke, nous bornerons-nous ici à citer quelques-uns des résultats communiqués dans son dernier ouvrage, qui a paru en 1880 sous le titre de «*Geodesy*».

5.

Dans la détermination la plus récente du sphéroïde terrestre, M. Clarke se sert des latitudes astronomiques indiquées dans le tableau suivant pour 49 stations qui sont réparties sur 5 arcs différents de méridien, à savoir:

I. L'arc anglo-français, avec les stations 1—15.
II. L'arc russo-scandinave, avec les stations 16—28.
III. L'arc péruvien, avec les stations 29—30.
IV. L'arc sud-africain, au Cap, avec les stations 31—35.
V. L'arc indien, avec les stations 36—49.

Outre ces arcs de méridien, il emploie 6 différences de longitudes déterminées astronomiquement entre les 7 stations indiennes désignées au bas du tableau par les numéros 50—56.

La combinaison des mesures astronomiques avec les géodésiques donne maintenant, par un calcul basé, comme à l'ordinaire, sur la méthode des moindres carrés, les valeurs suivantes pour le demi grand axe a du sphéroïde, exprimé en pieds anglais, et pour son aplatissement α:

$$a = 20926202 \text{ pieds}; \quad \alpha = \frac{1}{293,465};$$

ainsi que les déviations verticales partielles ξ et η, qui sont indiquées dans la dernière colonne, et dont les directions coïncident respectivement avec le méridien et avec la perpendiculaire.

Nos	Stations	Lat. obs.	ξ
1	Saxaford	60° 49′ 37″,21	+ 1″,453
2	North Rona	59 07 15,19	+ 0,081
3	Great Stirling	57 27 49,12	— 0,710
4	Kellie Law	56 14 53,60	— 1,089
5	Durham	54 46 06,20	— 1,453
6	Clifton	53 27 29,50	— 2,486
7	Arbury	52 13 26,59	+ 1,180
8	Greenwich	51 28 38,30	+ 0,778
9	Dunkirk	51 02 08,41	— 1,252
10	Dunnose	50 37 06,54	— 1,691
11	Panthéon	48 50 47,98	— 2,617
12	Carcassonne	43 12 54,30	— 1,228
13	Barcelone	41 22 47,90	+ 0,573
14	Montjouy	41 21 44,96	+ 3,927
15	Formentera	38 39 53,17	+ 4,524
16	Fuglenæs	70 40 11,23	+ 0,029
17	Stuor-oivi	68 40 58,40	— 1,423
18	Torneaa	65 49 44,57	+ 3,911
19	Kilpi-maki	62 38 05,25	— 1,258
20	Hogland	60 05 09,84	— 0,422
21	Dorpat	58 22 47,56	— 1,483
22	Jacobstad	56 30 04,97	+ 2,247
23	Nemesch	54 39 04,16	— 0,221
24	Belin	52 02 42,16	+ 0,108
25	Kremenetz	50 05 49,95	— 2,232
26	Ssuprunkowzi	48 45 03,04	+ 2,588
27	Wodolui	47 01 24,98	+ 1,133
28	Staro Nekrassowka	45 20 02,94	— 2,973
29	Cotchesqui	+ 0 02 31,22	+ 0,586
30	Tarqui	— 3 04 31,90	— 0,585

Nos	Stations	Lat. obs.	ξ
31	Cape Point	34° 21′ 06″,26	— 0″,161
32	Zwart Kop	34 13 32,13	+ 0,983
33	Royal Observatory	33 56 03,20	— 0,637
34	Heerenlogement	31 58 09,11	+ 0,198
35	North End	29 44 17,66	— 0,380
36	Shahpur	32 01 34,06	— 3,550
37	Khimnana	30 22 11,78	+ 0,141
38	Kaliana	29 30 48,32	+ 3,652
39	Garinda	27 55 30,02	— 1,904
40	Khamor	25 45 10,93	+ 1,993
41	Kalianpur	24 07 10,79	— 1,392
42	Fikri	22 01 03,77	— 2,949
43	Walwari	20 44 21,27	+ 4,532
44	Damargida	18 03 14,82	+ 1,240
45	Darur	16 09 46,13	+ 4,362
46	Honur	14 55 21,51	— 3,684
47	Bangalore	12 59 51,79	+ 2,903
48	Patchapaliam	10 59 41,06	— 2,204
49	Kudankulam	8 12 10,44	— 3,138

Nos	Stations	Long. obs.	η
50	Vizagapatam	+ 6° 21′ 35″,44	+ 0″,649
51	Hydrabad	+ 1 35 28,29	+ 2,121
52	Bombay	— 4 06 44,00	— 4,050
53	Mangalore	— 2 04 52,61	— 2,924
54	Bangalore	+ 0 39 20,62	— 0,303
55	Madras	+ 3 19 08,26	+ 4,499
56	Bellary	0 00 00,00	— 0,050

En examinant ce tableau, on doit sans doute être surpris de la coïncidence entre le sphéroïde et les différents arcs dont il a été déduit, coïncidence qui se manifeste clairement par les petites valeurs des déviations ξ et η, lesquelles ne sauraient en aucune façon être regardées comme ayant un caractère systématique marqué. M. Clarke a trouvé pour ces déviations la valeur probable:

$$0{,}674\sqrt{\frac{285{,}763}{56-8}} = 1{,}''645,$$

grandeur qui ne serait guère moindre, si elle avait été déterminée seulement par une triangulation isolée embrassant une étendue de pays relativement petite, où les déviations verticales proviennent exclusivement des petites ondulations partout présentes.

Pour montrer d'une manière encore plus frappante l'accord du sphéroïde avec les mesures individuelles, M. Clarke a déterminé, pour chacun des arcs de méridien dont l'étendue pouvait faire espérer un résultat suffisamment exact, la courbe qui reproduit le mieux les observations données. En procédant à ces déterminations pour les arcs I, II et V, on a supposé que les courbes correspondant à I et à II doivent être elliptiques, tandis que, pour l'arc V, on a fait la supposition plus générale que le rayon de courbure ϱ du méridien doit être représenté en fonction de la latitude λ par la formule:

$$\varrho = A + B\cos 2\lambda + C\cos 4\lambda,$$

où A, B et C sont trois constantes arbitraires. Si l'on place les courbes trouvées sur les méridiens sphéroïdiques en faisant coïncider leurs extrémités sud avec les points du sphéroïde qui ont la même latitude, et qu'on désigne par ζ la distance normale entre les courbes et le sphéroïde qui correspond à la latitude λ, un calcul exécuté pour une série de latitudes donnera en pieds anglais les valeurs de ζ réunies dans le tableau ci-dessous, où les signes + ou — indiquent en même temps la position des courbes au-dessus ou au-dessous des méridiens sphéroïdiques.

I. Anglo-Français		II. Russe		V. Indien	
λ	ζ	λ	ζ	λ	ζ
60°	— 2,7	70°	+ 4,1	32°	— 4,2
58	— 3,6	68	+ 3,8	30	+ 3,8
56	— 1,8	66	+ 3,1	28	+ 8,3
54	+ 1,9	64	+ 2,0	26	+ 9,3
52	+ 6,8	62	+ 0,8	24	+ 6,9
50	+ 11,8	60	— 0,5	22	+ 2,1
48	+ 16,1	58	— 1,8	20	— 4,3
46	+ 18,8	56	— 2,9	18	— 11,1
44	+ 18,9	54	— 3,7	16	— 16,7
42	+ 15,7	52	— 4,0	14	— 19,6
40	+ 8,1	50	— 3,7	12	— 18,5
		48	— 2,7	10	— 11,8

En tenant suffisamment compte de l'incertitude attachée à la détermination de ces courbes, on doit certainement trouver que la coïncidence obtenue est à un haut degré satisfaisante. Tant qu'on ne pourra pas se référer à d'autres mesures ayant un caractère tout différent, les géodésiens semblent parfaitement fondés à repousser la théorie du géoïde qui dévie fortement du sphéroïde.

6.

Il nous reste encore à mentionner les réductions par lesquelles les observations astronomiques faites en un point quelconque A peuvent être rapportées à sa projection A'. Si l'on désigne les composantes de la déviation verticale par ξ et η pour le point A et par ξ' et η' pour le point A', il est évident que le calcul rigoureux de ces réductions doit exiger pour les observations des latitudes la détermination de la différence $\xi' - \xi$, et pour les observations des longitudes ou des azimuts, celle de $\eta' - \eta$. Comme on sait, les géodésiens se sont déjà occupés pendant longtemps du calcul des valeurs de ces composantes, qui peuvent se déduire des irrégularités *visibles* de l'écorce terrestre, et ont trouvé que, dans un grand nombre de cas, elles atteignent une grandeur de plusieurs secondes. Mais, en examinant de plus près les calculs, on se convainc facilement que les différences dont il s'agit, lorsque la normale AA' n'est pas trop grande, sont toujours tellement minimes qu'il doit être permis, dans tous les cas ordinaires, de les négliger complètement. C'est seulement dans les pays de montagnes, où la station A est située à une hauteur considérable au-dessus du niveau de la mer, que les différences $\xi' - \xi$ et $\eta' - \eta$, qui, en général, ne sont que de petites fractions de ξ et de η, peuvent atteindre quelquefois des valeurs tellement grandes, que leur détermination doit être regardée comme une fâcheuse nécessité, le calcul de ces différences étant non seulement très laborieux, mais devant aussi s'appuyer sur des hypothèses plus ou moins incertaines.

7.

Il résulte de tous les développements qui précèdent qu'on a seulement besoin, pour la réduction des bases, d'avoir égard à leur hauteur au-dessus du niveau de la mer, et qu'on peut en général se dispenser complètement de toute réduction des mesures des angles et des observations astronomiques, celles-ci pouvant être considérées comme exécutées sur le sphéroïde lui-même. Il n'y a d'exceptions à cette règle que lorsque les mesures sont entreprises dans un pays de montagnes. Comme il a été dit plus haut, il peut alors devenir nécessaire de calculer les réductions $\xi' - \xi$ et $\eta' - \eta$, de même qu'il peut se présenter des cas où les déviations verticales sont si grandes, que leur influence sur la mesure des angles doit être soumise à un examen plus approfondi.

8.

En passant maintenant à l'examen des mesures transportées sur le sphéroïde, nous supposerons pour un moment que les éléments du sphéroïde, son demi grand axe a et son aplatissement $\mathfrak{a}$, sont des grandeurs connues, et qu'on connaît en même temps la latitude λ d'un des points de la triangulation, ainsi que l'azimut z d'un côté de triangle partant de ce point. Dans cette supposition, le réseau compensé des triangles peut s'appliquer sur le sphéroïde d'une manière exacte, et on pourra non seulement calculer pour tous les points de la triangulation les latitudes et les longitudes géodésiques correspondantes, ces dernières comptées du point de départ, mais aussi déterminer les azimuts de tous les côtés partant de ces points. En comparant les latitudes, les longitudes et les azimuts géodésiques ainsi trouvés avec les résultats astronomiques correspondants, les formules connues donneront alors une détermination directe des déviations ξ et η, à savoir de ξ pour toutes les stations où l'on a observé la latitude, et de η pour toutes celles où les observations se rapportent à la longitude ou à l'azimut. Mais il va sans dire que nos suppositions ne seront satisfaites qu'approximativement. Les valeurs données pour les éléments a, $\mathfrak{a}$, λ et z doivent toujours être considérées comme des valeurs approximatives qui ne deviendront définitives qu'après l'addition de corrections inconnues. La compensation du réseau des triangles, son calcul et son transport sur le sphéroïde seront par suite influencés par les accroissements des éléments, de même qu'il est évident que toute grandeur déterminée par le transport du réseau des triangles, par conséquent les déviations ξ et η elles-mêmes, doit se présenter comme fonction de ces accroissements. Le problème que nous avons maintenant à résoudre est précisément de déterminer ces accroissements, par la condition que le système correspondant des déviations verticales amène l'accord le plus grand possible entre le sphéroïde et toutes les mesures données.

9.

Au premier coup d'œil, il pourrait sembler que la solution de ce problème doit conduire à des calculs très compliqués. Mais il faut remarquer qu'on disposera toujours de valeurs si exactes pour les éléments approximatifs employés, que les accroissements eux-mêmes seront réduits à des grandeurs extrêmement petites qui ne pourront exercer qu'une faible influence sur la plus grande partie des calculs dont il s'agit. Nous montrerons ainsi, dans le paragraphe suivant, que, même dans des triangulations étendues qui s'éloignent de 50 à 60 milles danois d'un point de départ convenablement choisi, on pourra considérer l'influence des accroissements sur les résultats obtenus comme négligeable vis-à-vis des erreurs inévitables de ces derniers, et cela non seulement dans la compensation et le calcul du réseau des triangles, mais aussi dans son transport sur le sphéroïde, en tant qu'on n'a égard qu'à *la situation réciproque des points* ou, plus exactement, aux lignes géodésiques qui les relient à l'origine et aux angles que ces lignes font entre elles. C'est seulement dans le transport de l'origine aux autres points de la triangulation des latitudes, des longitudes et des azimuts géodésiques que cette influence devient très sensible, et c'est alors seulement que s'impose la nécessité de développer les équations correspondantes, par lesquelles les grandeurs en question et, par elles, en même temps, les déviations ξ et η sont représentées comme des fonctions linéaires de tous les accroissements. Mais les distances de l'origine et les angles que font entre elles les lignes géodésiques qui relient ensemble les points de la triangulation, pouvant être regardés comme invariables, ce développement ne présentera aucune espèce de difficulté, et nous montrerons plus loin qu'il est même facile de donner aux équations une forme qui simplifie au plus haut degré le calcul de leurs coefficients. Par les expressions ainsi trouvées pour les déviations verticales, la solution du problème sera ramenée à un simple emploi de la méthode des moindres carrés, car on est certainement fondé à supposer que la concordance la meilleure possible entre les mesures et le sphéroïde cherché, doit être établie par un système d'accroissements qui réduise la somme des carrés des déviations verticales, ou la somme des carrés $[\xi\xi] + [\eta\eta]$ à un minimum. Les objections qu'on a quelquefois essayé de faire valoir contre l'emploi de ce procédé ne reposent en effet que sur une interprétation incorrecte et un peu subtile du problème. On a ainsi prétendu que les déviations verticales ne pouvaient être appelées des *erreurs*, ni être considérées comme suivant la loi générale des erreurs. A cela nous répondrons d'abord que, si elles ne se laissent pas assimiler aux erreurs ordinaires provenant des mesures mêmes, elles se manifestent cependant comme des erreurs ou, si on le préfère, comme des déviations qui, dans la détermination de la grandeur et de la forme du sphéroïde cherché, se comportent tout à fait de la même manière que n'importe quelles autres erreurs arbitraires et accidentelles. Et ne suivissent-elles pas la loi générale des erreurs, cette circonstance, tout aussi peu ici que dans beaucoup de cas analogues, ne pourrait fournir un argument suffisant contre l'emploi de la méthode des moindres carrés, et elle ne saurait en tout cas être invoquée par les géodésiens qui partagent l'opinion de Gauss, que la méthode est complètement indépendante de la loi des erreurs. Mais si cette opinion n'est pas même trouvée assez bien fondée (conf. 1er vol. Note V), nous pouvons encore ajouter qu'il ne sera guère possible d'alléguer une raison plausible pour nier que la loi générale des erreurs soit applicable aux déviations verticales. On peut au contraire affirmer que les conditions réelles du problème, l'existence d'un grand nombre de petites ondulations et la distribution arbitraire sur celles-ci des stations astronomiques, rendent au plus haut degré vraisemblable que la loi des erreurs doit exercer ici son action. Toutefois, nous reconnaissons volontiers que ce n'est pas par de simples raisonnements, mais seulement en s'appuyant sur les expériences acquises, que des questions de cette nature doivent être décidées, et c'est pourquoi nous avons cru devoir soumettre les déviations verticales données par la détermination mentionnée plus haut du sphéroïde terrestre, à la recherche approfondie que nous allons maintenant exposer.

10.

En exécutant cette recherche, on a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant:

$\frac{f}{r}$	p	np	m	$np - m$	μ_1	μ_2	μ
0 — 0,5	0,264	14,8	17	— 2,2	1,34	3,30	3,56
0 — 1,0	0,500	28,0	31	— 3,0	2,28	3,74	4,38
0 — 1,5	0,688	38,5	38	+ 0,5	2,58	3,47	4,32
0 — 2,0	0,823	46,1	45	+ 1,1	2,28	2,86	3,66
0 — 2,5	0,908	50,9	49	+ 1,9	1,78	2,16	2,80
0 — 3,0	0,957	53,6	56	— 2,4	1,03	1,52	1,84
0 — ∞	1,000	56,0	56	0	0	0	0

Si les déviations des verticales sont considérées comme des erreurs ordinaires, et si l'on désigne par f une erreur quelconque et par r l'erreur probable, la 1ère colonne donne les valeurs limites de $\frac{f}{r}$ entre lesquelles a été faite la comparaison avec la loi générale des erreurs. Dans la 2e colonne, on trouve la probabilité, $p = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho \frac{f}{r}} e^{-tt} dt$, que les erreurs sont comprises entre les limites indiquées dans la 1ère colonne, et dans la 3e colonne, le produit np, ou le nombre même des erreurs qui, dans le cas actuel, où $n = 56$, doivent être renfermées entre les limites ci-dessus. La 4e colonne contient enfin le nombre m des erreurs véritables correspondantes qu'on a trouvées en faisant le dépouillement, l'erreur probable devant évidemment être déterminée ici par la formule:

$$r = \varrho \sqrt{\frac{2\,[ff]}{n}} = 0{,}6745 \sqrt{\frac{285{,}763}{56}} = 1{,}''524\,.$$

Pour prévenir tout malentendu, ajoutons encore que lorsque, par ex., on trouve pour m, dans la première ligne, le nombre 17, cela veut dire que, sur les 56 déviations verticales, il y en a 17 dont les valeurs *numériques* sont comprises entre les limites 0 et $\frac{1}{2}r$, par conséquent entre 0 et $0{,}''762$.

La comparaison des valeurs de m avec les valeurs correspondantes de np doit confirmer à un haut degré la supposition que la loi générale des erreurs s'applique aux déviations ξ et η, les différences $np - m$ de la 5e colonne étant partout si petites qu'elles semblent devoir s'expliquer par l'incertitude inhérente à leur détermination. Mais, pour ne pas s'en tenir à une appréciation plus ou moins fondée, il faut déterminer l'erreur moyenne totale μ correspondant à m, ou, si l'on veut, à $np - m = 0$, qu'on obtient par une combinaison de deux erreurs moyennes partielles et indépendantes μ_1 et μ_2. La première, μ_1, provient de la détermination de l'erreur probable, l'erreur moyenne de la valeur numérique de r pouvant être représentée par $\frac{r}{\sqrt{2n}}$, erreur qui entraîne une inexactitude correspondante dans le calcul de p, où la limite $\varrho \frac{f}{r}$ de l'intégrale doit être remplacée par $\varrho \frac{f}{r}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$. Mais même si p était calculé avec une exactitude absolue, il en résulterait pour sa représentation par la fraction $\frac{m}{n}$ une nouvelle erreur moyenne exprimée par $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Pour la valeur $m = np$, on obtient ainsi l'erreur moyenne $\mu_2 = \sqrt{np(1-p)}$ Les différentes erreurs moyennes: μ_1, μ_2 et $\mu = \sqrt{\mu_1\mu_1 + \mu_2\mu_2}$, sont indiquées dans les trois dernières colonnes du tableau, et l'on voit maintenant que μ n'est qu'une seule fois un peu plus petit que la différence $np - m$, tandis qu'il est en général notablement plus grand. On ne saurait donc mettre en doute que la loi générale des erreurs doit, dans le cas actuel, être considérée comme s'appliquant complètement aux déviations des verticales.

11.

Dans ce qui précède, nous avons supposé tacitement que les équations qui donnent ξ et η n'étaient pas du tout influencées par les erreurs des mesures géodésiques et astronomiques. Cette supposition peut bien être regardée comme fondée lorsque les déviations verticales sont déterminées par des observations de latitude ou de longitude, les erreurs, comparées avec les valeurs de ξ et de η, étant alors extrêmement petites. Mais il en est tout autrement si l'on emploie des observations d'azimut, parce que le transport de l'azimut géodésique aux stations très éloignées de l'origine, peut donner lieu à des erreurs qui sont de la même grandeur que les déviations verticales elles-mêmes. Cependant nous ne nous arrêterons pas, pour le moment, à cette difficulté, ni aux changements qui doivent nécessairement en résulter dans les équations dont on se sert. En nous réservant de revenir plus tard sur ce point, nous attendrons aussi jusque là pour traiter la question de la méthode à suivre, dans le cas où des observations simultanées de longitudes et d'azimuts produisent de doubles déterminations de η, qui rendent possible d'obtenir des équations indépendantes des déviations verticales.

12.

La compensation qui détermine le sphéroïde donne aussi les valeurs du système de déviations verticales dont on s'est servi. Pour chacune de ces déviations, on obtient une normale à une section plane du géoïde qui renferme la normale sphéroïdique de la station astronomique correspondante et est menée, pour ξ ou η, respectivement dans la direction du méridien ou de la perpendiculaire. De cette manière, on obtient un grand nombre de contributions à une détermination détaillée du géoïde même, mais il est évident que ces normales éparses en des points généralement très éloignés les uns des autres, ne peuvent produire aucune représentation satisfaisante de la surface. Elles se borneront en somme à nous apprendre que les inclinaisons du géoïde sur le sphéroïde sont partout extrêmement petites, ξ et η représentant directement les valeurs numériques des angles d'inclinaison des tangentes. Il s'ensuit aussi que les ondulations du géoïde devraient avoir une énorme étendue, bien plus grande qu'il n'y a lieu de le supposer, pour que leurs élévations et leurs dépressions pussent s'écarter de la surface du sphéroïde de plus de quelques pieds. Quant à pousser encore plus loin cette recherche, et à effectuer une détermination satisfaisante des élévations et des dépressions elles-mêmes, c'est une entreprise qui rencontrerait les plus grandes difficultés. Pour que les normales mentionnées ci-dessus fussent en état de reproduire partout les formes changeantes de la surface du géoïde, il faudrait augmenter dans une proportion tout à fait extraordinaire le nombre des stations astronomiques. Et pourtant c'est certainement le seul procédé qui puisse conduire à la solution du problème, car on n'en saurait guère indiquer d'autre qui, après examen, ne se montrât basé sur des suppositions inadmissibles. Si, de nos jours, les géodésiens portent de plus en plus leur attention sur la détermination du géoïde et semblent la considérer comme un problème dont la solution s'imposera bientôt à la haute géodésie, il deviendra donc absolument nécessaire de donner aux observations astronomiques un développement dont on n'a eu aucune idée jusqu'à présent. Mais cette condition indispensable une fois remplie, la solution sera relativement facile. Bien que nous ne nous occupions ici que d'un problème de l'avenir, nous indiquerons cependant encore en terminant la voie qui, peut-être entre toutes, conduira au but de la manière la plus simple et la plus naturelle.

13.

Faisons d'abord observer qu'il ne doit guère être question ici d'un traitement analytique ni d'un emploi de formules mathématiques. Le problème est essentiellement et dans son entier de la même nature que le problème *topographique*, qui a pour objet de reproduire les élévations et les dépressions de la surface terrestre, de sorte que, pour la détermination du géoïde, on sera aussi amené à traiter graphiquement les matériaux recueillis et à représenter graphiquement les résultats qui s'en déduisent. Pour obtenir une représentation exacte des formes du terrain, on se sert, comme on sait, d'une carte topographique qui donne les projections d'un système de courbes de niveau équidistantes; eh bien! c'est de la même manière, à l'aide d'une carte donnant, avec une équidistance convenable, les courbes de niveau géoïdiques parallèles au sphéroïde, qu'on obtiendra la reproduction complète des formes du géoïde. Et comme le problème, en ce qui concerne la surface de la terre, est résolu lorsqu'on connaît pour chacun des points du terrain la direction de la ligne d'inclinaison menée par ce point et l'angle qu'elle fait avec l'horizon, de même il le sera pour la surface du géoïde quand on pourra déterminer partout les grandeurs géoïdiques correspondantes, ou, ce qui évidemment revient au même, quand on pourra, pour chacun des points du géoïde, indiquer les déviations verticales ξ et η. C'est cette indication, qui doit être fournie par l'interpolation graphique, que nous allons maintenant considérer.

Nous commençons par supposer que, pour la partie du sphéroïde dont il s'agit, on a, à une échelle convenable, dressé une carte qui donne une projection conforme des méridiens et des parallèles sphéroïdiques. On pourra alors porter sur cette carte toutes les stations astronomiques à l'aide de leurs latitudes et de leurs longitudes géodésiques, et écrire en même temps à côté de chacun des points ainsi déterminés les valeurs correspondantes de ξ et de η. Si, en ne considérant provisoirement que les valeurs de ξ, on opère exactement avec elles suivant le procédé employé pour construire sur une carte topographique, lorsque les hauteurs données sont en nombre suffisant, le système choisi de courbes de niveau équidistantes, on pourra également ici tracer un système analogue de courbes équidistantes, seulement avec la différence que les courbes sont menées par des points ayant non la même hauteur, mais la même déviation verticale ξ, et que l'équidistance est déterminée par une différence constante entre les valeurs de ξ. Il est évident que le même procédé appliqué aux valeurs de η donnera pour cette déviation un système correspondant de courbes équidistantes, et qu'on pourra maintenant, en combinant ces deux systèmes, déterminer ξ et η pour un point quelconque du géoïde. Mais le géoïde lui-même se trouvera par là non seulement complètement déterminé, mais même plus que déterminé d'une infinité de manières. On sera en effet en état d'indiquer partout, par de simples constructions graphiques, les directions des lignes d'inclinaison et les angles qu'elles font avec le sphéroïde, et par suite aussi de construire les profils d'une section quelconque de la surface, construction qui s'exécute très facilement lorsque les sections suivent la direction d'un méridien ou d'un parallèle, parce qu'on n'emploie alors que les valeurs seules ou de ξ ou de η. En partant d'un ou de plusieurs profils, on sera enfin à même de tracer n'importe quel système de courbes de niveau équidistantes du géoïde, puisque celles-ci doivent couper partout normalement les lignes d'inclinaison. Et par là se présentent aussi une infinité de conditions de contrôle, les angles d'inclinaison, qui sont à considérer comme donnés, devant partout être en raison inverse des distances entre les courbes de niveau. Si ces conditions sont remplies d'une manière satisfaisante, on aura obtenu non seulement une preuve de l'exactitude de toutes les constructions, mais aussi une confirmation de l'hypothèse sur laquelle cette représentation est basée, à savoir que les déviations verticales données primitivement, ou les normales qu'elles ont servi à établir, sont suffisantes pour la détermination d'une seule et même surface continue. Comme tous les profils des méridiens sont déterminés par le système de courbes relatif à ξ, il est évident qu'abstraction faite de toute condition de contrôle, on pourra aussi déterminer le géoïde par l'emploi exclusif de ce système, combiné avec un nombre de valeurs de η suffisant pour construire un profil transversal qui coupe tous les méridiens. On emploierait de la même manière le système de courbes pour η, en le combinant avec un profil transversal qui coupât tous les parallèles. Nous devons encore ajouter que ce qui a été dit plus haut de la détermination *complète* du géoïde ne s'applique, à proprement parler, qu'à la forme de la surface. Les profils ne donnent que des différences de hauteurs, et tant qu'on ne connaîtra pas la hauteur absolue d'un point au-dessus du sphéroïde, celle-ci doit être fixée arbitrairement, de manière, par ex., que l'une des courbes équidistantes se trouve sur le sphéroïde même et ait partout une hauteur nulle.

Note au § 1: Le géoïde dans la région du Harz et du Thüringerwald.

En vue d'une détermination des déviations verticales, on a entrepris, sous la direction de M. le général Baeyer, pendant ces dernières années, un grand nombre d'observations de la latitude dans la région du Harz et du Thüringerwald. Bien que ces observations ne soient pas suffisantes pour donner la représentation graphique complète de la partie correspondante du géoïde, elles fournissent cependant des contributions si importantes à sa détermination, qu'il y a tout lieu de rechercher jusqu'à quel point il est possible, avec leur aide, de se former une image satisfaisante de la forme de la surface. C'est d'une recherche de ce genre que nous allons nous occuper.

Le tableau ci-dessous renferme toutes les grandeurs dont on s'est servi pour ce travail. Chacune des stations qui y figurent est déterminée par sa longitude géodésique approximative comptée à l'est du méridien de l'île de Fer, et par sa latitude géodésique exacte. L'avant-dernière colonne contient la latitude astronomique déduite des observations, et la dernière, la différence entre les deux latitudes indiquées, ou la déviation verticale ξ.

Tous les nombres de ce tableau sont extraits des publications suivantes de l'Institut géodésique de Prusse: « *Astronomisch-geodätische Arbeiten in den Jahren 1879 und 1880* », p. 105, et « *Astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen im Harz, im Jahre 1881* », p. 32, et nous avons cru devoir les employer dans cette recherche sans y faire aucune correction. Il faut toutefois observer que les valeurs de la déviation verticale ξ n'ont pas été déterminées par une compensation des observations. On a, en effet, obtenu les positions géodésiques qui sont indiquées dans le tableau par un transport du réseau des triangles sur le sphéroïde de Bessel, en se servant pour l'orientation d'un azimut observé à la station d'*Inselsberg* et en donnant à la station de départ *Seeberg* la latitude astronomique déduite des observations, ce qui veut dire, en d'autres termes, qu'on a, pour ce point, posé arbitrairement $\xi = 0$.

La déviation verticale η étant complètement inconnue, il peut seulement être question ici de la construction des courbes correspondant à des *valeurs égales* de ξ, et ce sont elles qu'on trouvera représentées de 2 en 2 secondes sur la planche ci-jointe, par un croquis marqué *A*, où les méridiens de la projection conforme du réseau géographique sont figurés par des lignes droites parallèles. Ce croquis n'est qu'une portion d'une carte plus grande sur laquelle étaient inscrites toutes les stations avec les déviations verticales correspondantes. En effet, comme dans plusieurs endroits, et notamment sur les bords de la carte, on ne disposait pas du nombre d'observations nécessaire pour une détermination satisfaisante des courbes, on n'a cru devoir conserver que la portion où ces défauts étaient moins sensibles, mais il va sans dire que la construction des courbes comprises dans le cadre du croquis s'appuie également sur les déviations verticales des stations situées en dehors.

Comme nous l'avons expliqué au § 1, on pourra maintenant, à l'aide des courbes ξ, déterminer les hauteurs relatives de tous les points d'une section quelconque menée par le géoïde suivant la direction d'un méridien. De ces profils méridiens, partant de la courbe zéro, au nord, nous en avons, au bas de la planche, reproduit trois qui correspondent au centre du croquis et à ses limites extrêmes à l'ouest et à l'est. Les hauteurs sont indiquées en pieds danois et représentées naturellement à une échelle fortement grossie. Nous ne nous sommes toutefois pas borné à la construction de ces trois profils, mais les avons complétés avec quatre autres, qui correspondent aux méridiens intermédiaires tracés sur la carte, en sorte que, de 15 en 15 minutes de longitude, nous avons pu suivre les élévations et les dépressions de la surface, en tant qu'elles ondulent dans la direction du nord au sud. Mais, de quelque secours que cela puisse être, l'image complète de la surface doit nécessairement exiger encore la détermination des hauteurs relatives des points de départ des profils qui sont situés sur la courbe zéro, au nord, ou, en d'autres termes, la détermination des déviations verticales inconnues η. A défaut de ces déviations, on est donc forcé de s'appuyer sur une hypothèse arbitraire plus ou moins vraisemblable pour pouvoir donner une représentation de la surface continue du géoïde. Le plus simple serait de placer tous les profils à la même hauteur, puis-

Nos	Stations	Long. géod.	Lat. géod.	Lat. observ.	ξ
1	Asse	28° 19'	52° 08' 20,"08	52° 08' 20,"03	+ 0,"05
2	Fallstein	28 18	52 01 05,61	52 01 08,98	— 3,37
3	Langelsheim	28 01	51 56 21,33	51 56 29,58	— 8,25
4	Schildberg	27 50	54 22,00	54 26,46	— 4,46
5	Hils	27 30	53 52,21	53 53,55	— 1,34
6	Harzburg	28 13	53 25,44	53 38,96	— 13,52
7	Ilsenburg	28 21	52 24,56	52 35,43	— 10,87
8	Regenstein	28 38	48 51,47	48 57,50	— 6,03
9	Brocken	28 17	48 01,11	48 10,34	— 9,23
10	Blankenburg	28 38	47 13,15	47 23,46	— 10,31
11	Hüttenrode	28 31	46 27,44	46 34,52	— 7,08
12	Neinstedt	28 44	45 46,37	45 54,61	— 8,24
13	Gegenstein	28 54	44 16,60	44 25,47	— 8,87
14	Osterode	27 54	43 22,90	43 22,80	+ 0,10
15	Hasselfelde	28 29	41 16,72	41 20,87	— 4,15
16	Victorshöhe	28 45	41 15,28	41 20,04	— 4,76
17	Lohberg	29 08	41 09,29	41 15,19	— 5,90
18	Hohegeis	28 20	39 58,08	39 56,74	+ 1,34
19	Petersberg	29 37	35 53,21	35 53,53	— 0,32
20	Mansfeld	29 07	35 41,63	35 43,58	— 1,95
21	Josephshöhe	28 40	34 54,40	34 50,62	+ 3,78
22	Tettenborn	28 13	34 22,09	34 17,06	+ 5,03
23	Göttingen	27 36	31 47,54	31 48,43	— 0,89
24	Nordhausen	28 28	30 06,00	30 02,04	+ 3,96
25	Kuhberg	28 42	29 05,17	29 00,21	+ 4,96
26	Bornstedter Warte	29 09	29 04,82	29 00,60	+ 4,22
27	Löwenburg	28 13	26 33,96	26 33,79	+ 0,17
28	Kyffhaüser	28 46	24 53,53	24 52,89	+ 0,64
29	Pfarssberg	29 34	20 50,34	20 48,36	+ 1,98
30	Leipzig	30 03	20 15,19	20 16,89	— 1,70
31	Dienkopf	28 01	20 02,66	20 01,76	+ 0,90
32	Hercules	27 04	20 02,24	19 00,60	+ 1,64
33	Sachsenburg	28 50	17 53,06	17 49,49	+ 3,57
34	Monraburg	28 58	14 18,43	14 15,15	+ 3,28
35	Meissner	27 31	13 37,78	13 37,78	0,00
36	Mühlhausen	28 09	12 10,14	12 06,04	+ 4,10
37	Eckartsberga	29 14	07 16,20	07 12,07	+ 4,13
38	Craula	28 09	03 30,14	03 28,09	+ 2,05
39	Seeberg	28 24	50 56 05,80	50 56 05,80	0,00
40	Knill	27 05	55 03,36	55 03,69	— 0,33
41	Inselsberg	28 08	51 08,36	51 11,47	— 3,11
42	Dollmar	28 09	37 32,15	37 27,25	+ 4,90
43	Heldburg	28 24	17 23,27	17 19,09	+ 4,18

que cela revient à supposer, ce qui en soi peut être regardé comme assez plausible, que sur la courbe zéro, où le Harz ne produit pas de déviation verticale vers le sud ou le nord, il n'en existe pas non plus dans la direction de l'ouest ou de l'est. Dans cette hypothèse, on obtient le croquis *B*, où le géoïde est représenté par des courbes équidistantes parallèles au sphéroïde, l'équidistance étant fixée à un pied danois. Comme on le voit, la surface s'élève au-dessus du sphéroïde jusqu'à une hauteur de 5 pieds. Le point le plus élevé ne correspond cependant pas au *Brocken* lui-même, mais en est éloigné de 2 milles danois environ dans la direction du sud-ouest. A partir de ce point, le géoïde s'abaisse dans toutes les directions, et, dans l'angle sud-est de la carte, apparaît une dépression très sensible qui descend au-dessous de la surface du sphéroïde.

En terminant, nous devons faire observer que la hauteur trouvée pour le géoïde est certainement trop grande. En effet, comme les observations ne sauraient fournir aucune contribution valable à la détermination du sphéroïde lui-même, leur compensation peut se faire en posant dans la formule (20): $\frac{da}{a} = 0$ et $d\alpha = 0$, et aurait ainsi pour résultat de donner à la déviation verticale de *Seeberg* une valeur positive. La sommation de toutes les 43 déviations verticales inscrites dans le tableau donnant $[\xi] = -59{,}''7$, on voit en outre qu'au lieu de $\xi = 0$, on obtiendra comme une valeur très approchée pour cette station $\xi = +1{,}''4$, et il est clair que toutes les autres valeurs de ξ devront subir une correction correspondante. Pour se représenter d'une manière suffisamment exacte le changement qui en résulte pour le géoïde, il suffit d'attribuer aux différents profils méridiens, autour de leurs points de départ, un mouvement de rotation descendant qui leur fasse décrire un angle de $1{,}''4$ environ. Ce mouvement réduit de plus de 1 pied la hauteur maximum et produit, vers le sud, un abaissement de la surface au-dessous du sphéroïde, les hauteurs, le long du bord sud de la carte, étant diminuées de 3 à 4 pieds.

Tab. I.

Planche 1

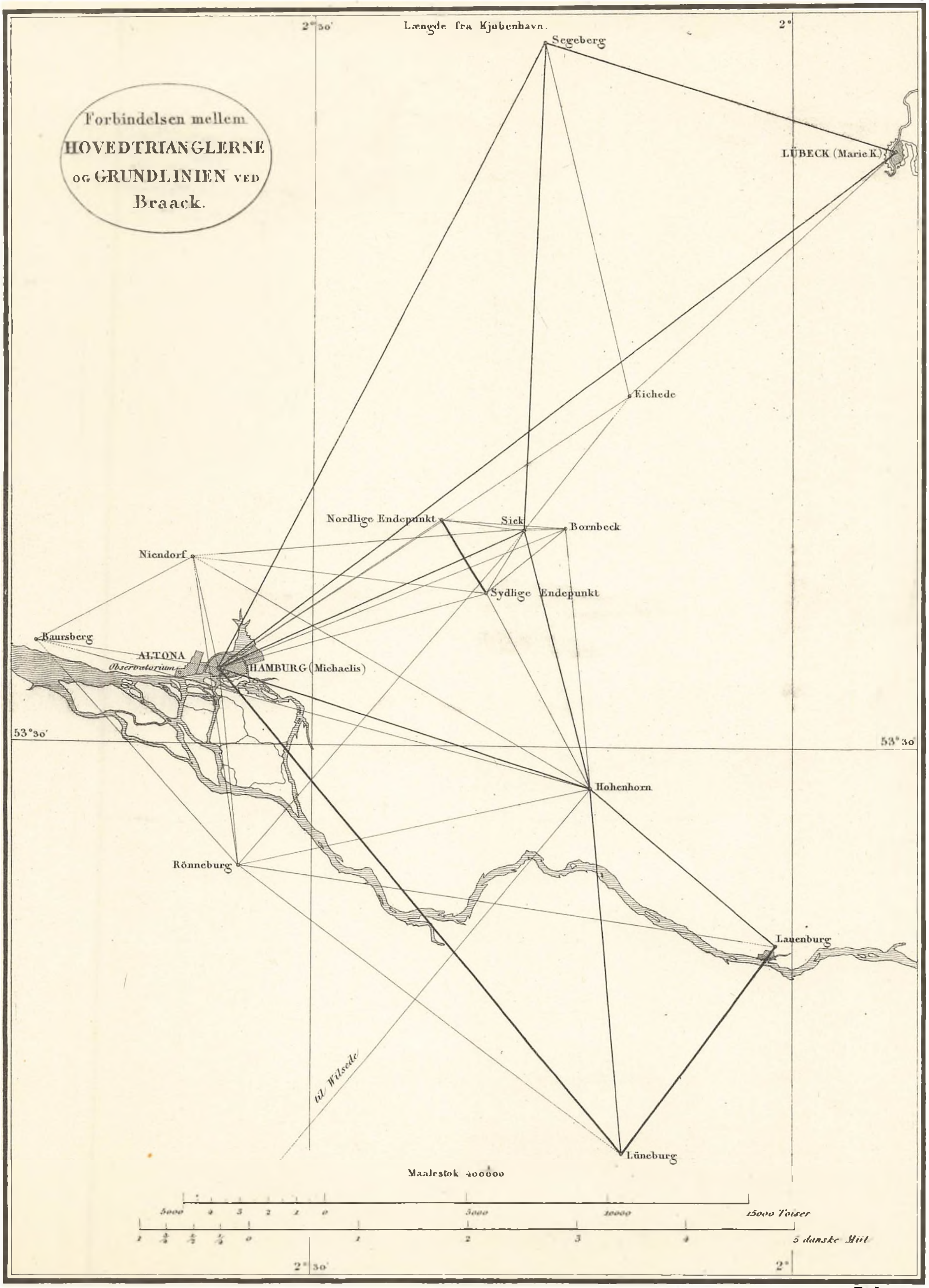


Planche 2

Hamburger sc.

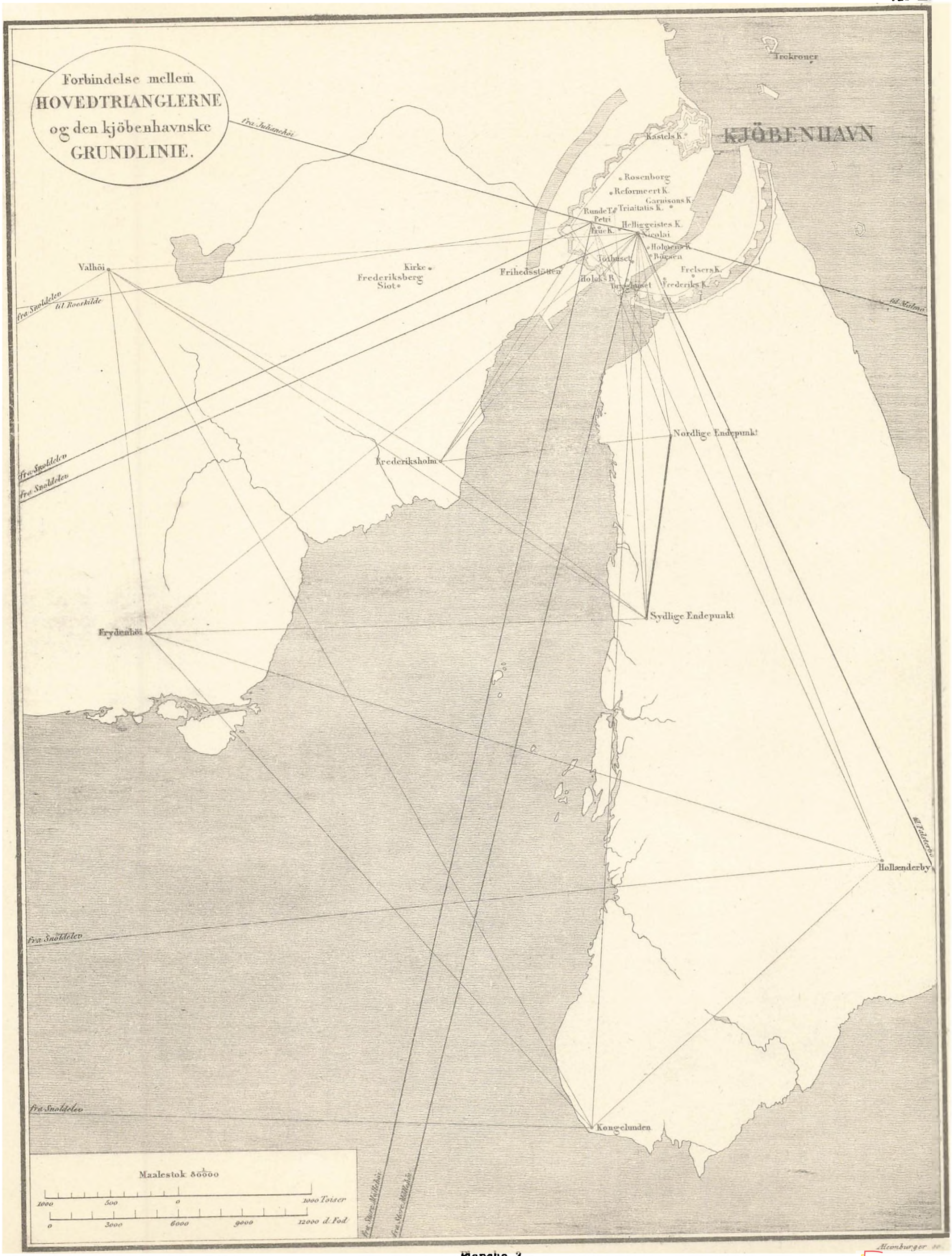

Forbindelse mellem
HOVEDTRIANGLERNE
og den kjöbenhavnske
GRUNDLINIE.
KJÖBENHAVN
Trekroner
Kastels K.
Rosenborg
Reformeert K.
Garnisons K.
Trinitatis K.
Runde T.
Petri
Frue K.
Helliggeistes K.
Nicolai
Holmens K.
Börsen
Töihuset
Holck B.
Frelsers K.
Frederiks K.
Frihedsstötten
Kirke
Frederiksberg
Slot
Valhöi
fra Julianehöi
fra Snoldelev
til Roeskilde
til Malmø
Nordlige Endepunkt
Frederiksholm
fra Snoldelev
fra Snoldelev
Sydlige Endepunkt
Frydenhöi
Hollænderby
til Falsterbo
fra Snoldelev
fra Snoldelev
Kongelunden
Maalestok 1/80000
1000
500
0
1000 Toiser
0
3000
6000
9000
12000 d. Fod
fra Store Möllehöi
fra Store Möllehöi
Altenburger

Planche 3

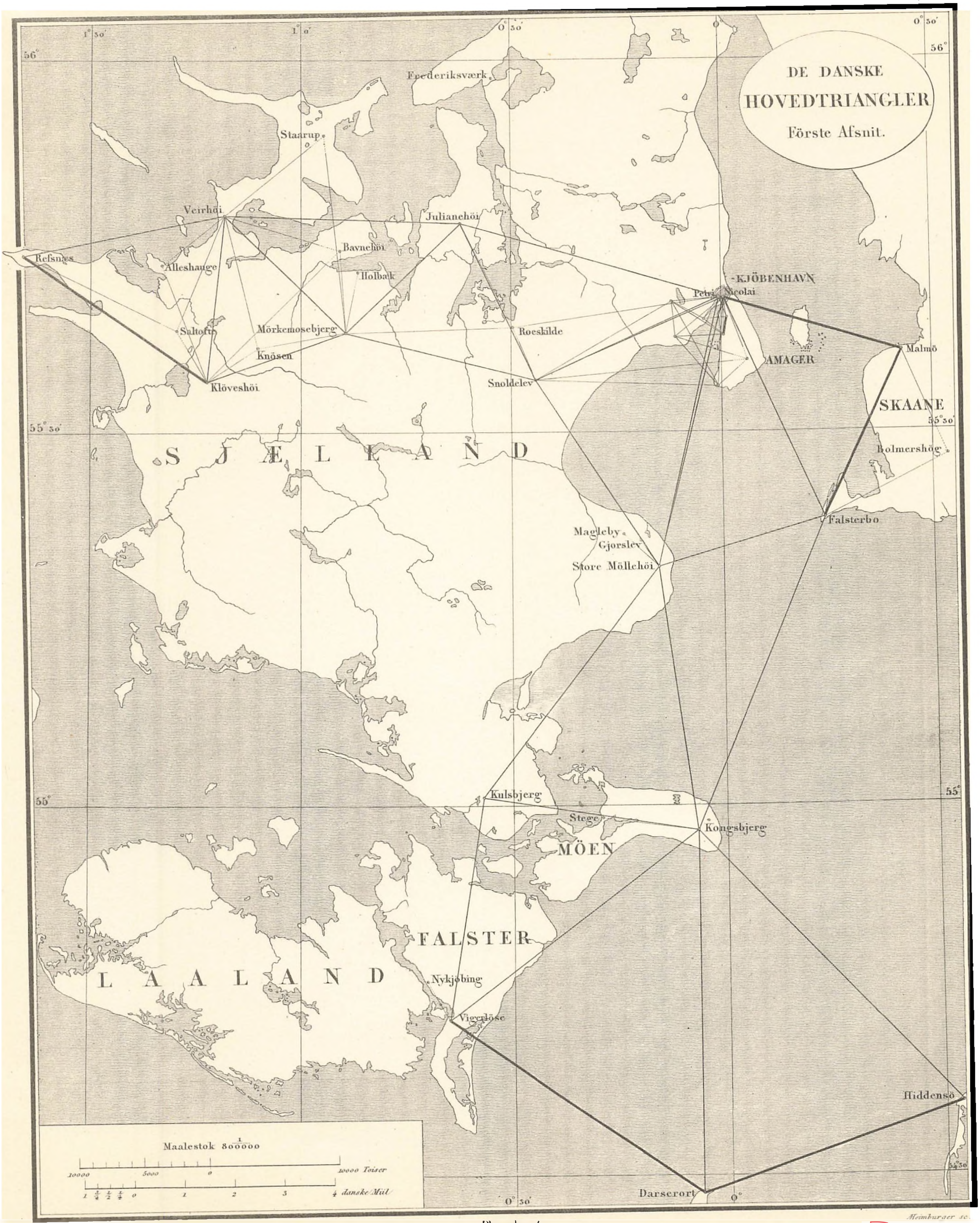

DE DANSKE
HOVEDTRIANGLER
Förste Afsnit.
Frederiksværk
Staarup
Veirhöi
Julianehöi
Bavnehöi
Holbæk
Refsnæs
Alleshauge
Saltofte
Mörkemosebjerg
Knösen
Kléveshöi
Roeskilde
Snoldelev
KJÖBENHAVN
Petri
Nicolai
AMAGER
Malmö
SKAANE
Bolmershög
Falsterbo
SJÆLLAND
Magleby
Gjorslev
Store Möllehöi
Kulsbjerg
Stege
Kongsbjerg
MÖEN
FALSTER
LAALAND
Nykjöbing
Vigerlöse
Hiddensö
Darserort
Maalestok 1/800000
10000 Toiser
danske Miil
Hamburger sc.

Planche 4

Tab. I.

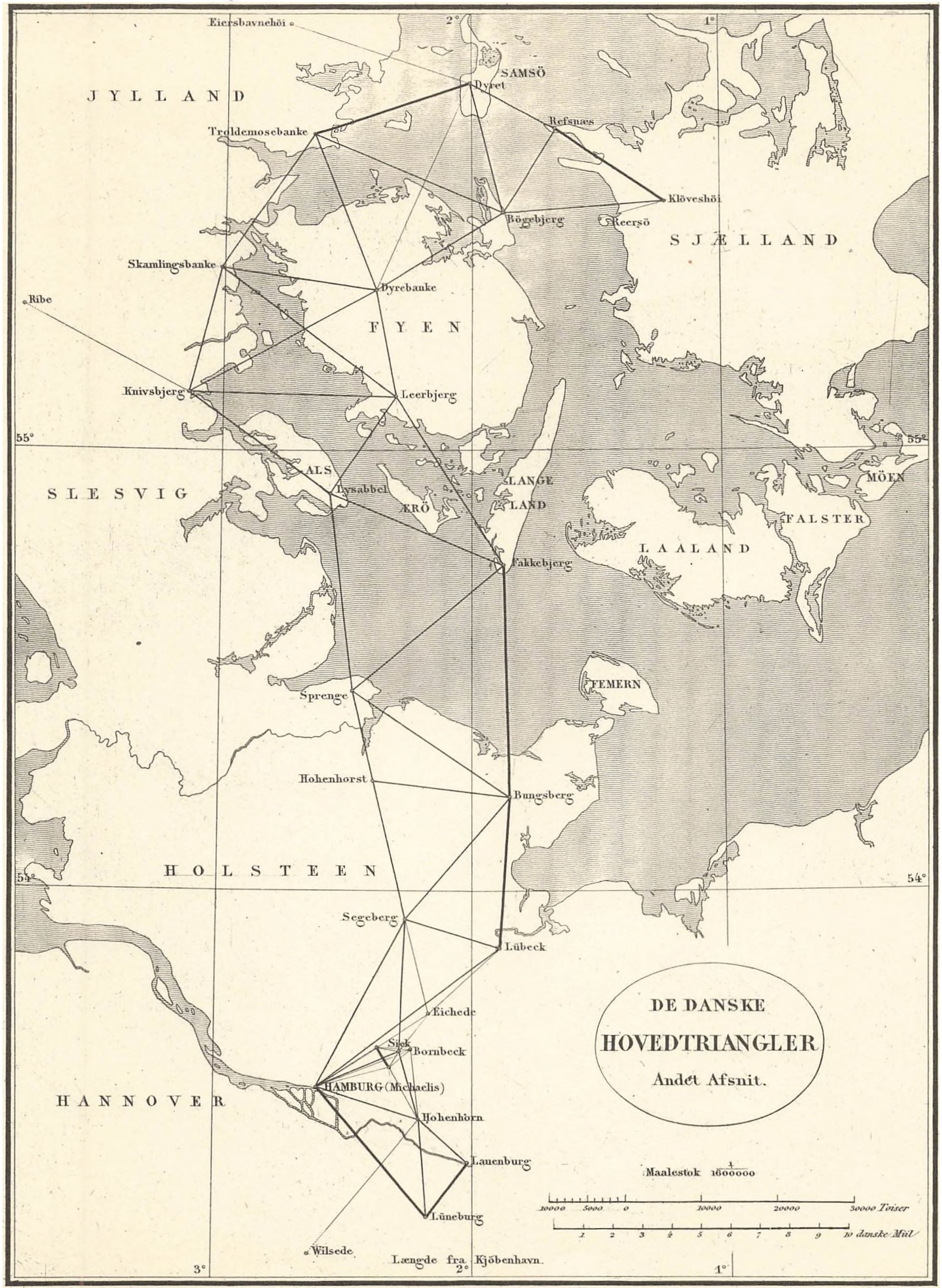
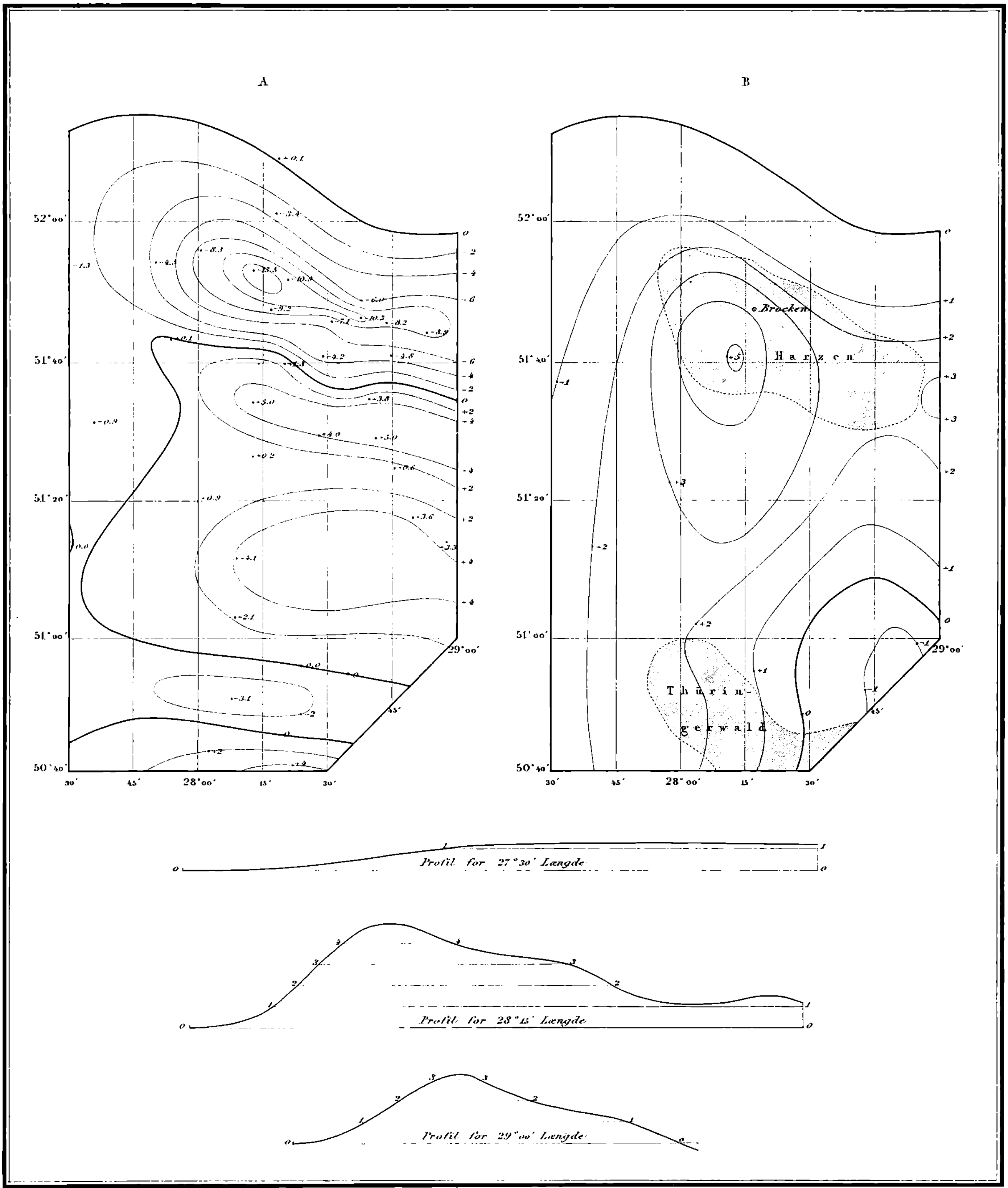


Planche 5


DE DANSKE
HOVEDTRIANGLER
og deres Forbindelser med
Udlandets Triangelrækker.
Længde fra Kjöbenhavn
Skagen
Teglhöi
Flade
Tise
Storskoven
Elmeberg
Appelviksås
Askomeberg
Slanör
Fästumper
Himmelskullen
Hinnakla
Nyrnsås
Jægerdalshöi
Muldbjerg
K A T T E -
G A T T E T
Rold Bavnehöi
Hovhöi
Boarp
Hegedal Bavnehöi
Kullen
Högalte
Lysnet
Högkullen
N Ö R R E -
J Y L L A N D
N O R D S Ö E N
Agri Bavnehöi
Laadnehöi
Ellemandsbjerg
Gräfve
Eiersbavnehöi
Frederiksværk
SAMSÖ
Dyret
S K A A N E
Dagstorp
Löberöd
Veirhöi
Julianehöi
Troldemosebanke
Refsnæs
Lund
KJÖBENHAVN
Romele-klint
Mörkemosebjerg
AMAGER
Malmö
Klövehöi
Snoldelev
Bögebjerg
Bolmershög
S J Æ L L A N D
Skamlingsbanke
Falsterbo
Dyrebanke
Store Möllehöi
F Y E N
Knivsbjerg
Leerbjerg
Kulsbjerg
Kongsbjerg
S L E S V I G
ALS
LANGE-
LAND
MÖEN
Lysabbel
FALSTER
LAALAND
Fakkebjerg
Vigerlöse
Ö S T E R S Ö E N
Arcona
Hiddensö
FEMERN
Baracrerl
Burg
Rugard
Sprenge
Stralsund
POMMERN
Helgoland
Hohenhorst
Bungsberg
Dietrichshagen
Greifswald
H O L S T E E N
Hohen Schönberg
Segeberg
MEKLENBURG
Lübeck
Sick
LAUENBURG
HANNOVER
Altona
HAMBURG (Michaelis)
Hohenhorn
Litberg
Lauenburg
Lüneburg
Wilsede
Nindorf
Timpenberg
Maalestok $\frac{1}{2400000}$
10000 5000 0 10000 20000 30000 Toiser
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 danske Mül
57°
56°
55°
54°

Planche 6



F. Chr. Møller sc.

Planche 7